Министерство образования и науки Российской Федерации
Муромский институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**
(МИ ВлГУ)

Отделение среднего профессионального образования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

для студентов специальности

38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»

Программа подготовки специалистов среднего звена

Составитель:
Мокеева Т.В.

Муром 2017 г.

Раздел 1. АЛГЕБРА

Тема 1.1. Развитие понятия о числе. Числовые функции

Число – это основное понятие математики, используемое для количественной характеристики, сравнения, нумерации объектов и их частей. Письменными знаками для обозначения чисел служат цифры, а также символы математических операций.

Основные числовые множества

- N – множество натуральных чисел.
- Z – множество целых чисел.
- Q – множество рациональных чисел.
- R – множество действительных чисел.
- C– множество комплексных чисел.

1. Натуральные числа. **Натуральными** называются числа, которые используются для счёта предметов или обозначения номера предмета в ряду однородных предметов: 1, 2, 3, 4, 5, … Над натуральными числами определены операции сложения и умножения. При сложении и умножении натуральных чисел снова получается натуральное число. Также над натуральными числами определены операции вычитания и деления, как обратные операциям сложения и умножения соответственно. Однако результатом выполнения этих операций с двумя натуральными числами не обязательно будет натуральное число. Подробно этот вопрос рассмотрен в следующих двух параграфах.

2. Целые числа. **Целыми** числами называют числа натуральные, им противоположные и нуль. **Модулем** целого числа называется расстояние от точки, соответствующей этому числу до начала отсчета. Операция взятия модуля обозначается двумя вертикальными чертами. Модуль числа равен самому этому числу, если число положительное, числу, противоположному данному, если число отрицательное, и нулю, если число равно нулю.

Рациональные числа $\frac{m}{n}$, где n – целое число, m – натуральное.

Комплексное число – это выражение вида

$$z = x + iy, \qquad (1.1)$$

где *x, y* – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, *x*, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, *y*, - *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Числом, *сопряженным* к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$. Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \dfrac{6 \pm 6\,i}{2}$, т.е. $x_1 = 3 + 3i$; $x_2 = 3 - 3i$.

Справедливы следующие *правила арифметических действий над комплексными числами* $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ (эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$).

Пример 2. Вычислить $z=\dfrac{2-7i}{3+4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z=\frac{2-7i}{3+4i}=\frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2}=\frac{6-29i-28}{9+16}=\frac{-22-29i}{25}=-\frac{22}{25}-\frac{29}{25}i;$$

поэтому $\operatorname{Re} z=-\dfrac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z=-\dfrac{29}{25}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку *M(x;y)* на декартовой плоскости (при этом на оси *OX* располагаются вещественные числа $z=x+i0=x$, а на оси *OY* – чисто мнимые числа $z=0+iy=iy$).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки *M*), т.е. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi=\operatorname{Arg} z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0\le\varphi<2\pi$. При этом выражение вида

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad (1.2)$$

называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

Преобразуем (1.1)

$$z=x+iy=\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=|z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

и, сравнивая с (1.2), получаем, что аргумент z можно найти, решив систему

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex] \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{x}{|z|}\\[2ex] \sin\varphi=\dfrac{y}{|z|}\end{cases} \qquad (1.3.)$$

Пример 3. Записать комплексное число в тригонометрической форме $z = 1 - i\sqrt{3}$, указать модуль и аргумент комплексного числа.

Решение. По определению $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Для определения аргумента воспользуемся формулой: $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Получаем, что $\varphi = \arg z = \dfrac{5\pi}{3}$.

Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид: $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Возведение в степень и извлечение корней. Если комплексное число задано тригонометрической формой $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то справедлива формула Муавра

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.4)$$

Для извлечения корня *n*-й степени (*n* – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая *n* значений этого корня:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,\ldots,n-1. \qquad (1.5)$$

Пример 4. Вычислить: a) $(-1+i)^{13}$; b) $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. В задании a), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = -1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi = 3\pi/4$ (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно, $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и $(-1+i)^{13} = \sqrt{2^{13}}\left(\cos\dfrac{3\cdot 13\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\cdot 13\pi}{4}\right)$ (в силу

(1.4)). Учитывая что $\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$ и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

$$(-1+i)^{13} = 64\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = 64\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 64 - 64i.$$

В задании b) тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ ($|z|=1$), поэтому в силу (1.5)

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

Выписываем три искомых корня:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

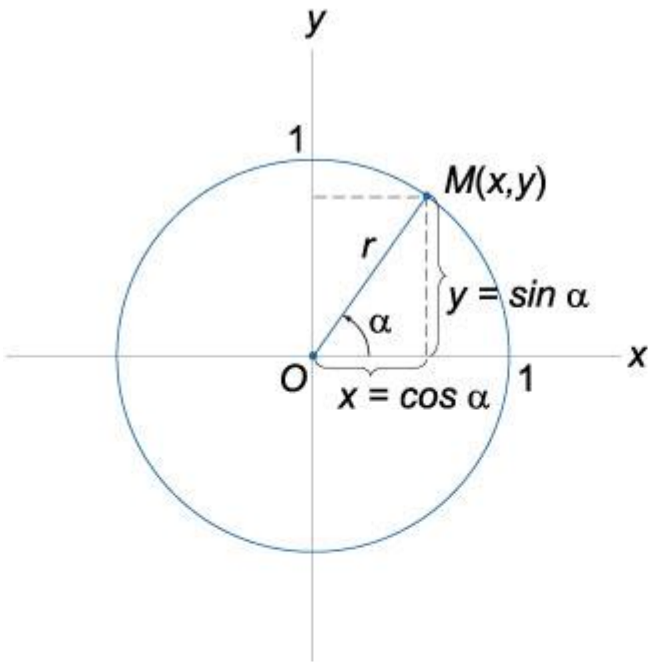
Тема 1.2. Тригонометрические функции

1. *Тригонометрические функции* представляют собой элементарные функции, аргументом которых является *угол*. С помощью тригонометрических функций описываются соотношения между сторонами и острыми углами в прямоугольном треугольнике. Области применения тригонометрических функций чрезвычайно разнообразны. Так, например, любые периодические процессы можно представить в виде суммы тригонометрических функций (ряда Фурье). Данные функции часто появляются при решении дифференциальных и функциональных уравнений.

2. К тригонометрическим функциям относятся следующие 6

функций: *синус*, *косинус*, *тангенс*, *котангенс*, *секанс* и *косеканс*. Для каждой из указанных функций существует обратная тригонометрическая функция.

3. Геометрическое определение тригонометрических функций удобно ввести с помощью *единичного круга*. На приведенном ниже рисунке изображен круг радиусом r=1. На окружности обозначена точка M(x,y). Угол между радиус-вектором OM и положительным направлением оси Ox равен α.



4. *Синусом* угла α называется отношение ординаты y точки M(x,y) к радиусу r:
   sinα=y/r.
   Поскольку r=1, то синус равен ординате точки M(x,y).
5. *Косинусом* угла α называется отношение абсциссы x точки M(x,y) к радиусу r:
   sinα=x/r
6. *Тангенсом* угла α называется отношение ординаты y точки M(x,y) к ее абсциссе x:
   tanα=y/x,x≠0
7. *Котангенсом* угла α называется отношение абсциссы x точки M(x,y) к

ее ординате y: $\cot\alpha = x/y, y \neq 0$

8. *Секанс* угла α − это отношение радиуса r к абсциссе x точки M(x,y): $\sec\alpha = r/x = 1/x, x \neq 0$
9. *Косеканс* угла α − это отношение радиуса r к ординате y точки M(x,y): $\csc\alpha = r/y = 1/y, y \neq 0$
10. В единичном круге проекции x, y точки M(x,y) и радиус r образуют прямоугольный треугольник, в котором x,y являются катетами, а r − гипотенузой. Поэтому, приведенные выше определения тригонометрических функций в приложении к прямоугольному треугольнику формулируются таким образом:

    Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

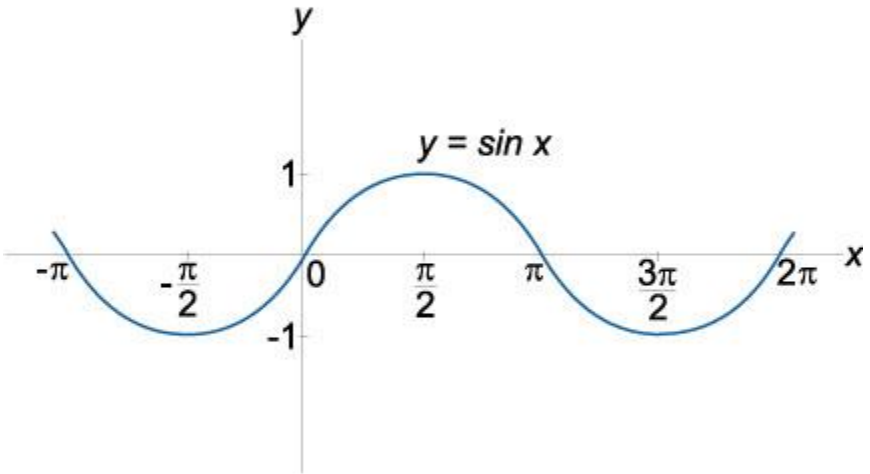
    Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

    Тангенсом угла α называется противолежащего катета к прилежащему.

    Котангенсом угла α называется прилежащего катета к противолежащему.

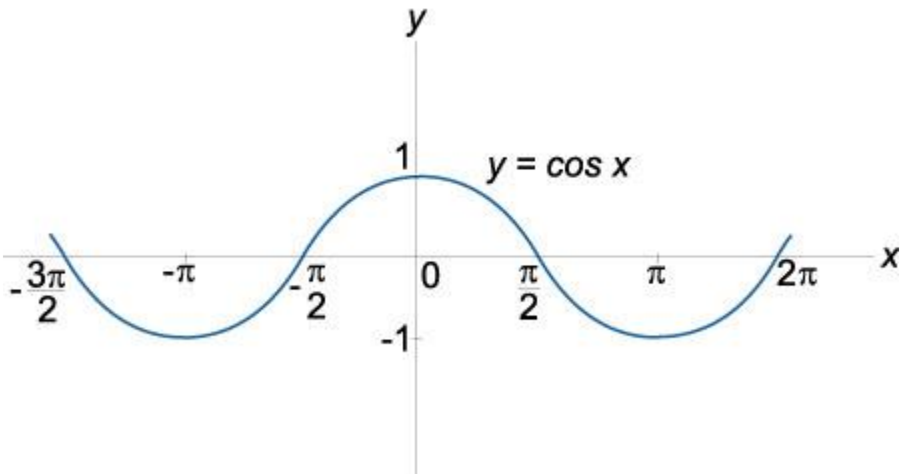
    Секанс угла α представляет собой отношение гипотенузы к прилежащему катету.

    Косеканс угла α представляет собой отношение гипотенузы к противолежащему катету.
11. *График функции синус* $y = \sin x$, область определения: $x \in R$, область значений: $-1 \leq \sin x \leq 1$



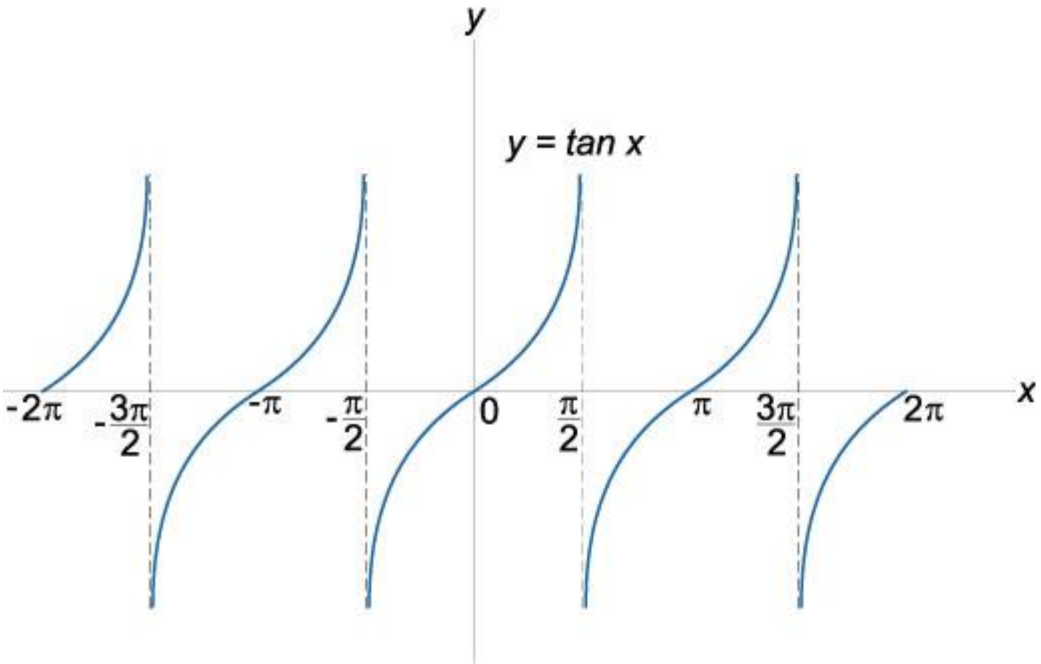
12.*График функции косинус*

y=cosx, область определения: x∈R, область значений: −1≤cosx≤1



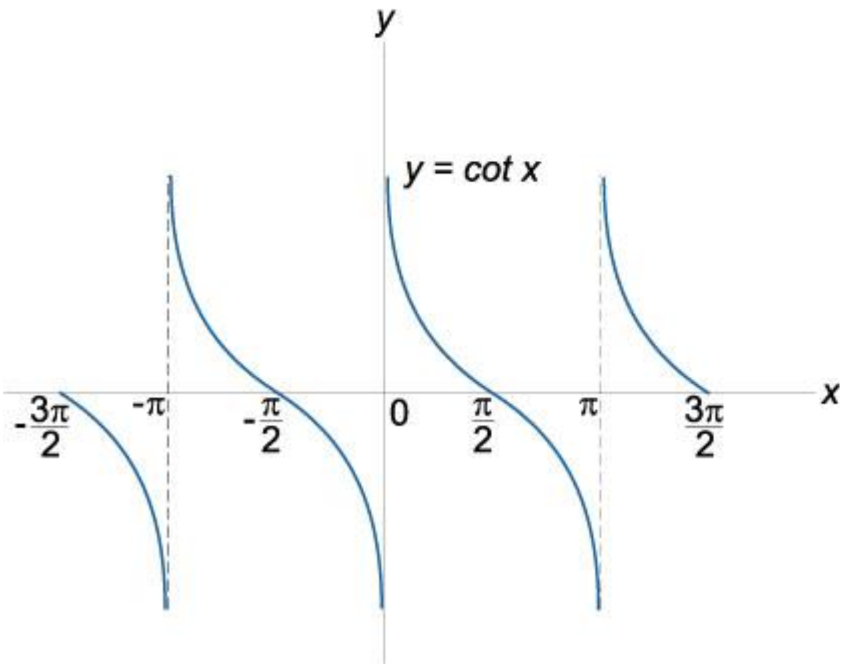
13.*График функции тангенс*

y=tanx, область определения: x∈R,x≠(2k+1)π/2, область значений: −∞<tanx<∞



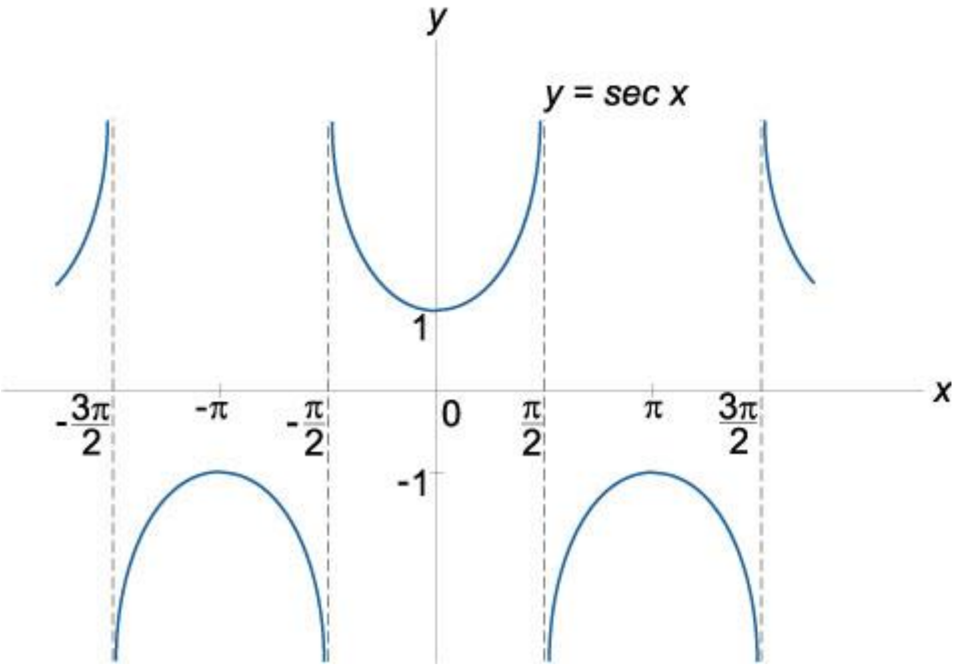
14.*График функции котангенс*

y=cotx, область определения: $x \in R, x \neq k\pi$, область значений: $-\infty < \cot x < \infty$

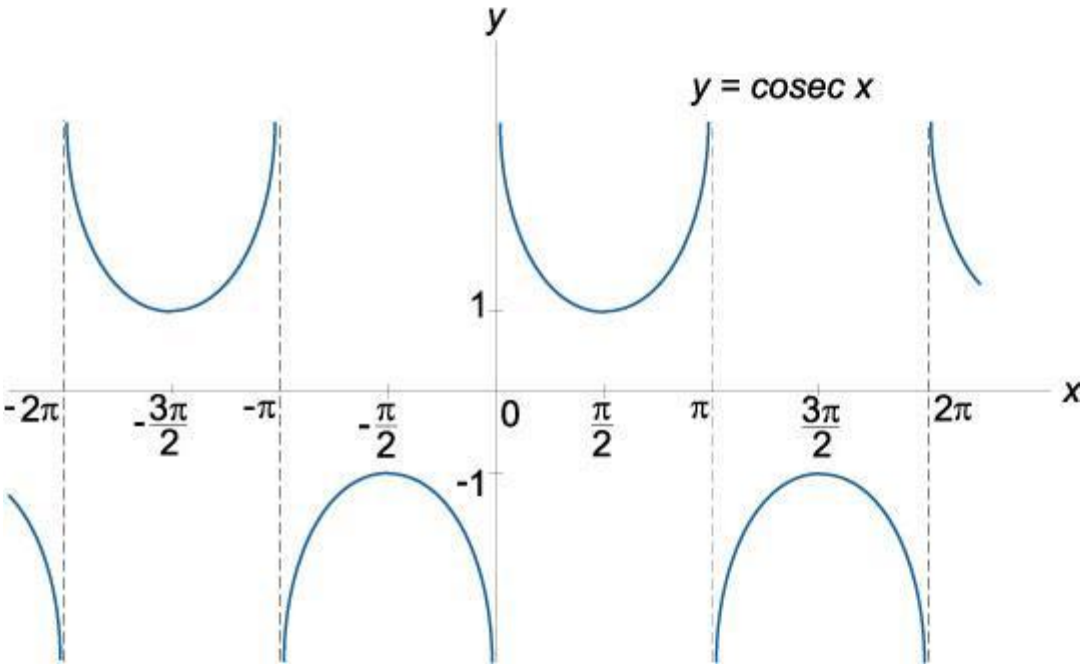


15.*График функции секанс*

y=secx, область определения: $x \in R, x \neq (2k+1)\pi/2$, область значений: $\sec x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



16.*График функции косеканс* y=cscx, область определения: $x \in R, x \neq k\pi$, область значений: $cscx \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Раздел 2. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Тема 2.1. Основы тригонометрии .Тема 2.2. Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	*Общее решение*	*Частные случаи*		
		$a=-1$	$a=0$	$a=1$
$\sin x=a$, $\lvert a\rvert\le 1$	$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$
$\cos x=a$, $\lvert a\rvert\le 1$	$x=\pm\arccos a+2\pi n$	$x=\pi+2\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=2\pi n$
$\operatorname{tg} x=a$, $a\in(-\infty;\infty)$	$x=\operatorname{arctg} a+\pi n$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$
$\operatorname{ctg} x=a$, $a\in(-\infty;\infty)$	$x=\operatorname{arcctg} a+\pi n$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$

Пример. Найдите корень уравнения:

$$\cos\frac{\pi(2x+10)}{3}=\frac{1}{2}$$

В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Решением уравнения cos x = a являются два корня:

$$x_1=\arccos\ a+2\pi n,\quad n\in Z$$

$$x_2=-\arccos\ a+2\pi n,\quad n\in Z$$

или

$$x=\pm\arccos\ a+2\pi n,\quad n\in Z$$

Значит $\frac{\pi(2x+10)}{3}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,\quad n\in Z$

Определение: Пусть число а по модулю не превосходит единицы. Арккосинусом числа а называется угол х, лежащий в пределах от 0 до Пи, косинус которого равен а.

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \text{так как} \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Значит

$$\frac{\pi(2x+10)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n \in Z$$

Выразим *x:*

$$\frac{\pi(2x+10)}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z \quad \Big| \cdot \frac{3}{\pi}$$

$$2x + 10 = \pm 1 + 6n, \qquad n \in Z$$

$$2x = \pm 1 + 6n - 10, \qquad n \in Z \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{1}{2} + 3n - 5 \quad n \in Z$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + 3n - 5 \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{1}{2} + 3n - 5 \quad n \in Z$$

$$x_1 = 3n - 4{,}5 \quad \text{и} \quad x_2 = 3n - 5{,}5 \quad n \in Z$$

Найдём наибольший отрицательный корень. Как это сделать? Подставим различные значения n в полученные корни, вычислим и выберем наибольший отрицательный.

Вычисляем:

При n = – 2 x_1= 3 (– 2) – 4,5 = – 10,5 x_2= 3 (– 2) – 5,5 = – 11,5

При n = – 1 x_1= 3 (– 1) – 4,5 = – 7,5 x_2= 3 (– 1) – 5,5 = – 8,5

При n = 0 x_1= 3·0 – 4,5 = – 4,5 x_2= 3·0 – 5,5 = – 5,5

При n = 1 x_1= 3·1 – 4,5 = – 1,5 x_2= 3·1 – 5,5 = – 2,5

При n = 2 x_1= 3·2 – 4,5 = 1,5 x_2= 3·2 – 5,5 = 0,5

Получили, что наибольший отрицательный корень равен –1,5

Ответ: –1,5

Пример. Решить уравнение:

$$\sin\frac{\pi(x-3)}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решением уравнения sin x = a являются два корня:

$$x_1=\arcsin a+2\pi n,\quad n\in Z$$

$$x_2=\pi-\arcsin a+2\pi n,\quad n\in Z$$

Либо (он объединяет оба указанные выше):

$$x=(-1)^n\cdot\arcsin a+\pi n,\quad n\in Z$$

$$\text{Значит}\qquad\frac{\pi(x-3)}{4}=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n,\quad n\in Z$$

Определение: Пусть число a по модулю не превосходит единицы. Арксинусом числа a называется угол x, лежащий в пределах от -90° до 90° синус которого равен a.

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}\quad\text{так как}\quad\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Значит

$$\frac{\pi(x-3)}{4}=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$$

Выразим x (умножим обе части уравнения на 4 и разделим на Пи):

$$\frac{\pi(x-3)}{4}=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n\qquad\Big|\cdot\frac{4}{\pi}$$

$$x-3=(-1)^n+4n\quad n\in Z$$

$$x=(-1)^n+4n+3\quad n\in Z$$

Найдём наименьший положительный корень. Здесь сразу видно, что при подстановке отрицательных значений n мы получим отрицательные корни. Поэтому будем подставлять n = 0,1,2 …

При $n = 0$ $x = (-1)^0 + 4\cdot 0 + 3 = 4$

При $n = 1$ $x = (-1)^1 + 4\cdot 1 + 3 = 6$

При $n = 2$ $x = (-1)^2 + 4\cdot 2 + 3 = 12$

Проверим при $n = -1$ $x = (-1)^{-1} + 4\cdot(-1) + 3 = -2$

Значит наименьший положительный корень равен 4.

Ответ: 4

Пример. Решите уравнение:

$$tg\frac{\pi(8x+5)}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решением уравнения tg x = a является корень:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z$$

Значит $$\frac{\pi(8x+5)}{6} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, \quad n \in Z$$

Определение: Арктангенсом числа a (a – любое число) называется угол x принадлежащий интервалу – 90° до 90°, тангенс которого равен a.

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \text{так как} \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Значит

$$\frac{\pi(8x+5)}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$$

Выразим x (умножим обе части уравнения на 6 и разделим на Пи):

$$\frac{\pi(8x+5)}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z \quad \Big| \cdot \frac{6}{\pi}$$

$$8x + 5 = 1 + 6n \quad n \in Z$$

$$8x = 6n - 4 \quad n \in Z \quad \Big| \cdot \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{3}{4}n - \frac{1}{2}$$

Найдём наименьший положительный корень. Подставим значения n = 1,2,3... Отрицательные значения подставлять нет смысла, так как видно, что получим отрицательные корни:

При $n = 0 \quad x = \frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

При $n = 1 \quad x = \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

При $n = 2 \quad x = \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{1}{2} = 1$

Таким образом, наименьший положительный корень равен 0,25.

Ответ: 0,25

Тема 2.3. Преобразование тригонометрических выражений

Пример 1. Вычислить:

$\sin 14^0 \cos 31^0 + \sin 31^0 \cos 14^0 =$ | $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$= \sin(14^0 + 31^0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Пример 2. Вычислить:

$\cos 5^0 \cos 40 - \sin 5^0 \sin 40^0 =$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Пример 3. Упростить:

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 =$

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha +$

$+\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha =$

$(a^2 - b^2) = a^2 - 2ab + b^2$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Ответ. 2

Пример 4. Доказать:

$tg^2\alpha - sin^2\alpha = tg^2\alpha \cdot sin^2\alpha$

$$tg^2\alpha - sin^2\alpha = \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} - \frac{sin^2\alpha \backslash cos^2\alpha}{1} = \frac{sin^2\alpha - sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha}{cos^2\alpha} =$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{sin^2\alpha\,(1 - cos^2\alpha)}{cos^2\alpha} = \frac{sin^2\alpha \cdot sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha \cdot sin^2\alpha$$

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1;$

$tg^2\alpha - sin^2\alpha = tg^2\alpha \cdot sin^2\alpha$

$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$

Тождество доказано.

Раздел 3. ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Тема 3.1. Степени, корни, логарифмы.

Определения степени: $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ раз},\ a \neq 0;\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$ где m – целое число, а n – натуральное.

2. *Свойства степени:*

1) $a^0=1$;

2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;

3) $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

5) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;

6) $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$;

7) $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\cdot\beta}$.

3. Определение корня: $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$.

4. Арифметический корень: $\sqrt[2n]{a}, a \geq 0; \sqrt[2n]{a} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[2n]{a}$.

5. Свойства корней:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$;

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$, где m, n – натуральные числа.

5) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$.

6. Формулы сокращённого умножения:

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3) $a^2 - b^2 = (a + b)\cdot(a - b)$;

4) $a^3 + b^3 = (a + b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$;

5) $a^3 - b^3 = (a - b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$;

6) $(a + b)^3 = a^3 + 3a2b + 3ab^2 + b^3$;

7) $(a - b)^3 = a^3 - 3a2b + 3ab^2 - b^3$.

7. Определение логарифма: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$.

8. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

9. Десятичный логарифм (по основанию 10): lgb:$10^{\lg b} = b$.

10. Натуральный логарифм (по основанию e): lnb:$e^{\ln b} = b$.

11. Свойства логарифмов:

1) $\log_a 1 = 0$;

2) $\log_a a = 1$;

3) $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$;

4) $\log_a \frac{x}{y}$ =;$\log_a x - \log_a y$;

5) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$;

6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ – переход к новому основанию;

7) $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \cdot \log_a b$.

Пример 1. Вычислить $\dfrac{5 \cdot \sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$.

Решение:

$$\frac{5 \cdot \sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{17}{136}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Ответ: 2,5.

Пример 2. Вычислить $\left(\sqrt{12} + \sqrt{27}\right) \cdot \sqrt{3}$.

Решение:

$$\left(\sqrt{12} + \sqrt{27}\right) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} + \sqrt{81} = 6 + 9 = 15$$

Ответ: 15.

Пример 3. Вычислить: $\sqrt[3]{0{,}1^3 \cdot 20^6}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{0{,}1^3 \cdot 20^6} = \sqrt[3]{0{,}1^3} \cdot \sqrt[3]{\left(20^2\right)^3} = 0{,}1 \cdot 20^2 = 0{,}1 \cdot 400 = 40.$$

Ответ: 40.

Пример 4. Сравнить числа $\sqrt[5]{\sqrt{32}}$ и $\sqrt[6]{8}$.

Решение:

Преобразуем данные числа так, чтобы степени корня в них были равны. $\sqrt[5]{\sqrt{32}} = \sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}$; $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Делаем вывод, что данные числа равны.

Ответ: $\sqrt[5]{\sqrt{32}} = \sqrt[6]{8}$.

Пример 5. Выразите величину р из равенства $(3-p)\cdot 2=\frac{m}{a}$.

Решение:

$$(3-p)\cdot 2=\frac{m}{a} \Leftrightarrow 6-2p=\frac{m}{a}\Leftrightarrow -2p=\frac{m}{a}-6\Leftrightarrow p=3-\frac{m}{2a}.$$

Ответ: $3-\frac{m}{2a}$.

Пример 6. Определите знак разности $2-\sqrt[6]{100}$.

Решение:

Так как $2=\sqrt[6]{2^6}=\sqrt[6]{64}$, то $\sqrt[6]{64}-\sqrt[6]{100}<0$

Ответ: Разность отрицательна.

Пример 7. Вычислить $\log_2 6-\frac{1}{2}\log_2 9$.

Решение:

$$\log_2 6-\frac{1}{2}\log_2 9=\log_2 6-\log_2 9^{\frac{1}{2}}=\log_2 6-\log_2\sqrt{9}=\log_2\frac{6}{3}=\log_2 2=1.$$

Ответ: 1.

Тема 3.2. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция

Функция $y=a^x$, где a – заданное число, называется показательной функцией переменной x.

Если $a>0$, то функция $y=a^x$ определена при всех действительных значениях x, причём при $a=1$ имеем $1^x=1$.

Если $a<0$, то функция $y=a^x$ определена только при целых х (при условии, что знаменатель показателя – нечётное число).

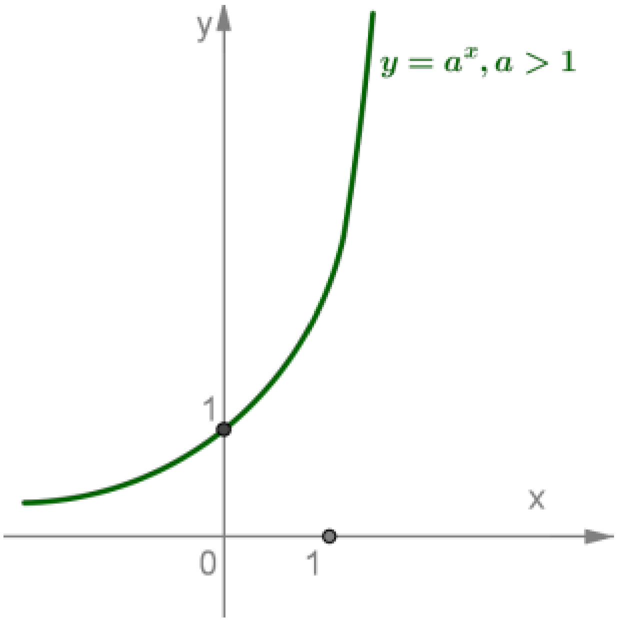
При $a=0$ выражение 0^x определено при $x>0$.

В связи с выше изложенным, показательную функцию рассматривают при *a>0* и *a?1*. Функция, заданная формулой y=ax(где a>0,a≠1), называется показательной функцией с основанием a.

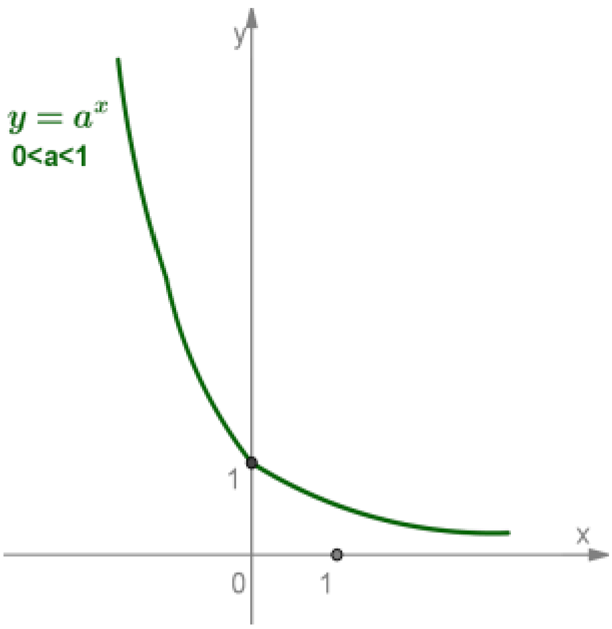
Сформулируем основные свойства показательной функции:

Графики показательных функций изображены на рисунках:

1) для случая a>1



2) для случая 0<a<1



Логарифмическая функция

Функцию вида $y = \log_a(x)$, где **a** любое положительное число не равное единице, называют логарифмической функцией с основанием **a**. Здесь и далее для обозначения логарифма мы будем использовать следующую нотацию: $\log_a(b)$ - данная запись будет обозначать логарифм b по основанию a.

Основные свойства логарифмической функции:

1. Областью определения логарифмической функции будет являться все множество положительных вещественных чисел. Для краткости его еще обозначают **R+**. Очевидное свойство, так как каждое положительное число имеет логарифм по основанию а.

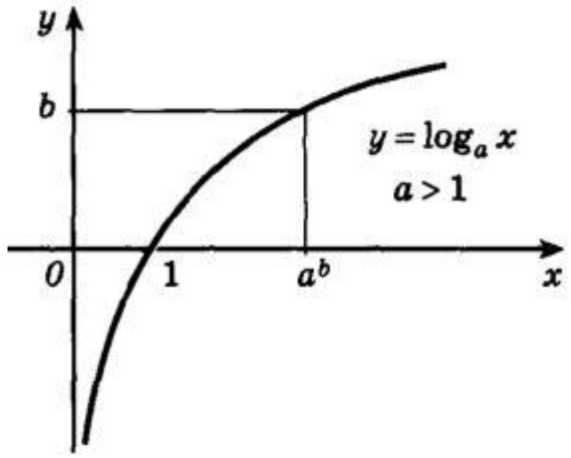
2. Областью значения логарифмической функции будет являться все множество вещественных чисел.

3. Если основание логарифмической функции $a>1$, то на всей области определения функции возрастает. Если для основания логарифмической функции выполняется следующее неравенство $0<a$

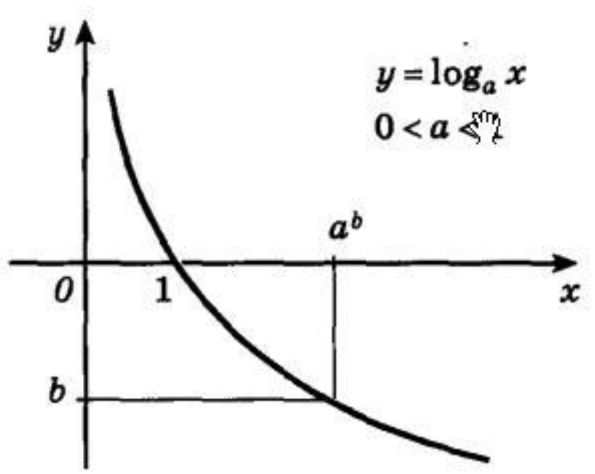
4. График логарифмической функции всегда проходит через точку (1;0).

5. Возрастающая логарифмическая функция, будет положительной при $x>1$, и отрицательной при $0<x<1$.

6. Убывающая логарифмическая функция, будет отрицательной при $x>1$, и положительной при $0<x<1$:



На следующем рисунке представлен график убывающей логарифмической функции - (0<a<1):

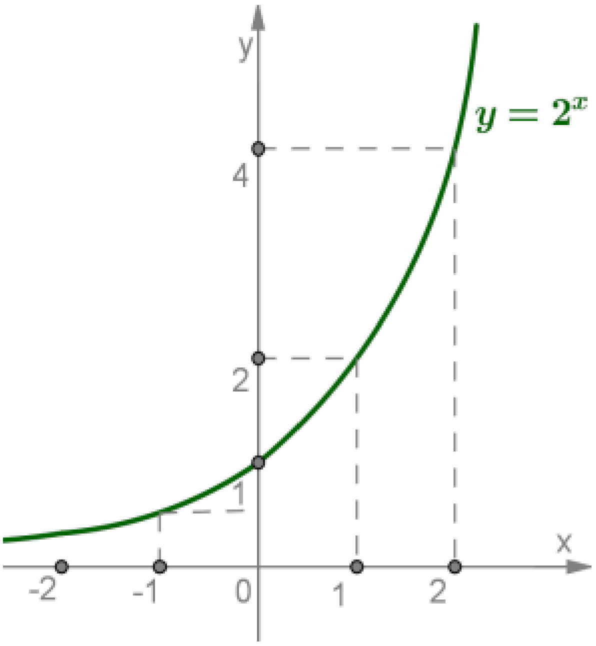


7. Функция не является четной или нечетной. Логарифмическая функция – функция общего вид.

8. Функция не имеет точек максимума и минимума.

Пример. Построим график функций $y = 2^x$, использовав рассмотренные свойства и найдя несколько точек, принадлежащих графику.

Отметим, что график функции $y = 2^x$ проходит через точку $(0;1)$ и расположен выше оси Ох.



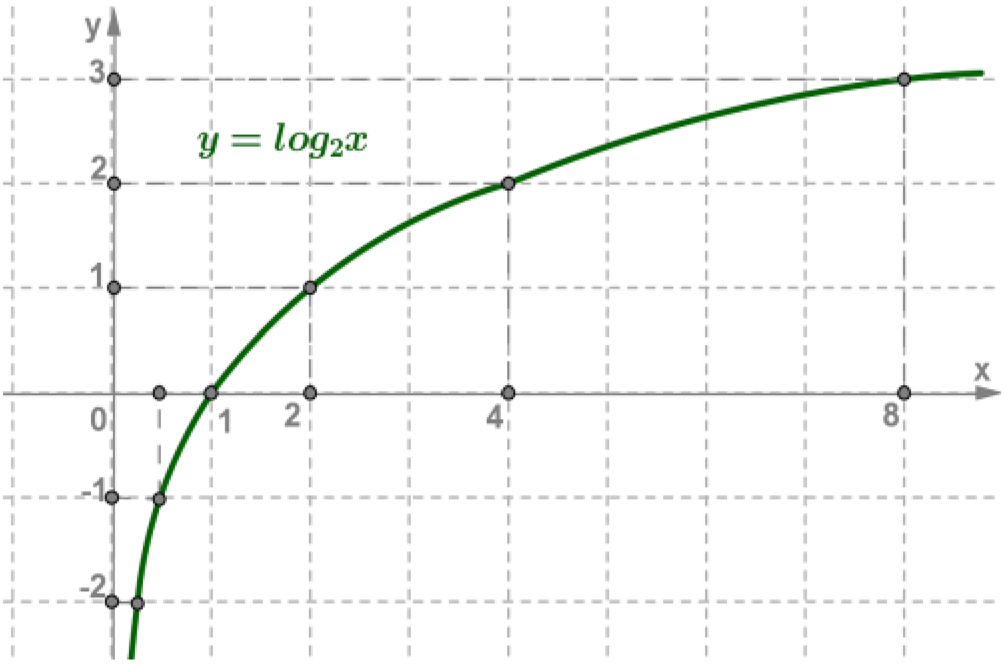
Если x<0 и убывает, то график быстро приближается к оси Ox (но не пересекает ее);

если x>0 и возрастает, то график быстро поднимается вверх.

Пример . Построить график функции :

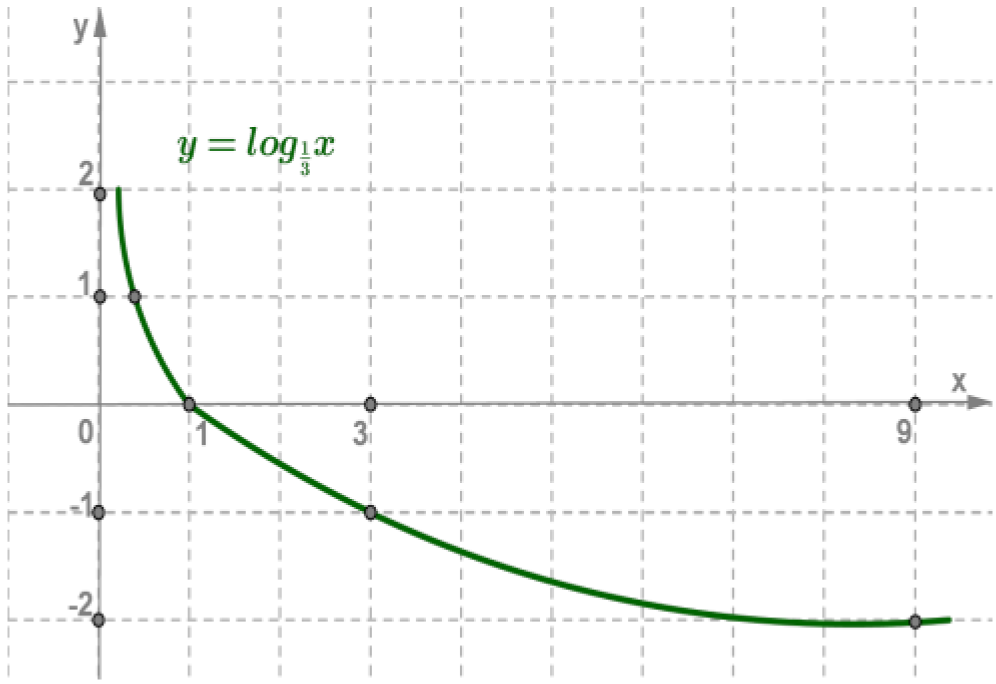
y=log2x, основание 2>1

x	14	12	1	2	4	8
y=log2x	−2	−1	0	1	2	3



Пример. Построить график функции
y=log13x основание 0<13<1

x	9	3	1	13	19
y=log13x	−2	−1	0	1	2



Раздел 4. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Тема 4.1. Уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств.

Пример. Решить неравенство:

$6x^2$-x-2<0

Решим неравенство методом интервалов

Решение:

1.Найдем нули функции, т. е приравняем функцию к нулю:

$6x^2$-x-2=0

2.Применим формулы: ax^2+вх+с=0; D=$в^2$-4ас; $x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{D}}{2a}$:

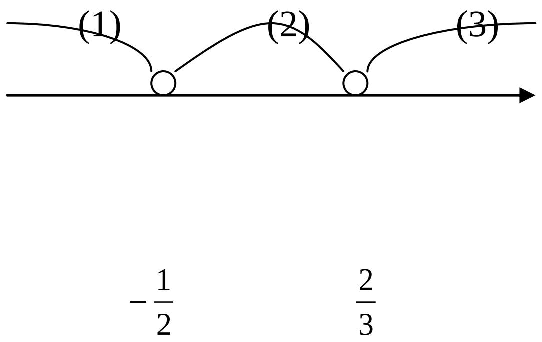
а=6; в=-1; с=-2.

D=1+4·6·2=1+48=49;

$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$

$x_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{1-7}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$;

3.Отметить на числовой прямой и разбить на интервалы:



4.Прочередовать знак функции в каждом интервале, для этого из (1) интервала взяли x=1 и подставили в условие 6·1-1-2>0, поэтому надо в (1) интервал подставить «+» и дальше прочередовать знак.

5.Дать ответ, где значение функции отрицательно, т. е «-».

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

Иррациональные уравнения. Найдите корень уравнения:

$$\sqrt{\frac{12}{2x-14}} = \frac{1}{10}$$

Для того, чтобы избавится от корня, возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{\frac{12}{2x-14}}\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$\frac{12}{2x-14} = \frac{1}{100} \quad |\cdot 100$$

$$\frac{1200}{2x-14} = 1$$

$$1200 = 2x - 14$$

$$2x = 1214$$

$$x = 607$$

Рациональные уравнения. Найдите корень уравнения:

$$\frac{x-41}{x-5}=3$$

Отметим, что х не равен пяти (обращает знаменатель в ноль). Умножим обе части уравнения на (х – 5):

$$\frac{x-41}{x-5}=3 \quad |\cdot(x-5)$$

$$x-41=3(x-5)$$

$$x-41=3x-15$$

$$x-3x=41-15$$

$$-2x=26$$

$$x=-13$$

Сделаем проверку:

$$\frac{-13-41}{-13-5}=3 \quad \Rightarrow \quad \frac{-54}{-18}=3 \quad \Rightarrow \quad 3=3 \quad \text{Верно}$$

Ответ: –13

Логарифмические уравнения . Найдите корень уравнения: $\log_3(4–x) = 4$

Используем основное логарифмическое тождество.

Так как $\log_b a = x$ $b^x = a$, то

$3^4 = 4 – x$

$x = 4 – 81$

$x = – 77$

Проверка:

$\log_3(4–(–77)) = 4$

$\log_3 81 = 4$

$3^4 = 81$ Верно.

Ответ: – 77

Показательные уравнения. Найдите корень уравнения $4^{1–2x} = 64$.

Необходимо сделать так, чтобы в левой и правой частях были показательные выражения с одним основанием. 64 мы можем представить как 4 в степени 3. Получим:

$4^{1-2x} = 4^3$

Основания равны, можем приравнять показатели:

$1 - 2x = 3$

$-2x = 2$

$x = -1$

Проверка:

$4^{1-2(-1)} = 64$

$4^{1+2} = 64$

$4^3 = 64$

$64 = 64$

Ответ: –1

Решение систем показательных и логарифмических уравнений

При решении систем показательных и логарифмических уравнений применяются те же методы, что и при решении систем алгебраических уравнений – линейные комбинации, подстановки.

Пример. Решить систему: $\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot 4^{y-1} = 20,25, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-y) = -1. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: x-y>0 $\Rightarrow$ x>y.

$$\begin{cases}\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot 4^{y-1} = 20,25 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-y) = -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot 4^{y-1} = \frac{81}{4} \\ x-y=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\frac{3}{2}\right)^{y+2} \cdot 2^{2(y-1)} = \frac{3^4}{2^2} \\ x = y+2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}3^{y-2} \cdot 2^{y-2} = 1 \\ x = y+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6^{y-2} = 6^0 \\ x = y+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y-2=0 \\ x=y+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=2 \\ x=4.\end{cases}$$

Ответ. x=4; y=2.

Пример. Решить систему: $\begin{cases}x^{log_3 y} + 2y^{log_3 x} = 27, \\ log_y 3 - log_x 3 = 1.\end{cases}$

Решение. ОДЗ: $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$

$$\begin{cases}x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_y 3 - \log_x 3 = 1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^{\log_3 x \log_3 y} + 2 \cdot 3^{\log_3 x \log_3 y} = 3^3, \\ \log_y 3 - \log_x 3 = 1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3 \cdot 3^{log_3 x log_3 y} = 3^3, \\ log_y 3 - log_x 3 = 1.\end{cases}$$

Поскольку $\log_3 y = \frac{1}{\log_y 3}, \log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$, получим систему

$$\begin{cases}3^{\frac{1}{\log_y 3} \cdot \frac{1}{\log_x 3}} = 3^2, \\ \log_y 3 - \log_x 3 = 1.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{\log_y 3} \cdot \frac{1}{\log_x 3} = 2, \\ \log_y 3 - \log_x 3 = 1.\end{cases}$$

которая заменой $t = \log_x 3,\ z = \log_y 3$ приводится к виду:

$$\begin{cases}\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{t} = 2, \\ z - t = 1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z \cdot t = \frac{1}{2}, \\ z = 1 + t.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2t^2 + 2t - 1 = 0, \\ z = 1 + t.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = (-1 \pm \sqrt{3}) / 2, \\ z = (1 \pm \sqrt{3}) / 2.\end{cases}$$

Возвращаемся к исходным переменным.

$$\begin{cases} x = 3^{\frac{1}{t}}, \\ y = 3^{\frac{1}{z}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3^{1\pm\sqrt{3}}, \\ y = 3^{-1\pm\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Ответ. $x = 3^{1\pm\sqrt{3}}$; $y = 3^{-1\pm\sqrt{3}}$.

Решение показательных и логарифмических неравенств

Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при 1>a равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ (знак неравенства сохраняется), а при 1< a<0 равносильно неравенству $f(x) < g(x)$ (знак неравенства меняется на противоположный).

Логарифмическое неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ при a > 1 равносильно системе неравенств $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$ а при 0 < a < 1 – системе неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$.

При решении логарифмических неравенств надо найти область определения неравенства; при потенцировании по основанию, большему единицы, знак неравенства сохраняется, а при потенцировании по положительному основанию, меньшему единицы, знак неравенства меняется на противоположный. На практике удобно применять формулы:

$$log_a f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) > a^b, \\ a > 1. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

или

$$log_a f(x) < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b, \\ a > 1. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) > a^b, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Раздел 5. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Тема 5.1. Последовательности.

Числовые последовательности.

Определение. ***Числовой последовательностью*** (или ***последовательностью)*** называется множество чисел $\{a_n\}$, полученное при отображении множества натуральных чисел N в множество действительных чисел R $(f: N \to R)$, при котором $f(n) = a_n$. Число a_n называется ***элементом последовательности***, а число n его ***номером***. Очевидно, множество $\{a_n\}$ является счетным множеством.

Основные способы задания последовательностей.

1. Задание с помощью ***формулы***, например, $\left\{a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\right\}$ или просто $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\right\}$.

   Такая последовательность содержит числа $\left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{17}, -\dfrac{1}{26}, \cdots\right\}$.

2. Задание с помощью ***рекуррентного соотношения***, например, $\{a_1 = 1,\, a_2 = 2,\, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\}$. Такая последовательность состоит из чисел $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots\}$.

Последовательности $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ называются соответственно ***суммой***, ***разностью***, ***произведением*** и ***частным*** последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***постоянной,*** если все ее члены равны одному и тому же числу.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***монотонной***, если она является ***неубывающей*** ($\forall n \in N \quad a_n \ge a_{n-1}$) или ***невозрастающей*** ($\forall n \in N \quad a_n \le a_{n-1}$).

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***строго монотонной***, если она является ***возрастающей*** ($\forall n \in N \quad a_n > a_{n-1}$) или ***убывающей*** ($\forall n \in N \quad a_n < a_{n-1}$).

Последовательности типа $\{(-1)^n\}$ называются ***колеблющимися.***

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной сверху***, если существует такое число M, что все члены последовательности меньше M.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной снизу***, если существует такое число M, что все члены последовательности больше M.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной*** , если она ограничена одновременно и сверху и снизу.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***неограниченной***, если для любого числа $M > 0$ найдется такой ее член a_n, что $|a_n| > M$. (В случае неограниченной последовательности членов, удовлетворяющих этому свойству, будет бесконечно много).

I. Предел последовательности.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***сходящейся*** к числу a, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon$ такое, что при $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Число a называется ***пределом последовательности*** $\{a_n\}$ при $n \to \infty$ и обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Определение. Если последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела, то ее называют ***расходящейся***.

Приведем эквивалентное определение такой последовательности.

Теорема. Всякая монотонная и ограниченная последовательность сходится.

Пример (***второй замечательный предел***)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

II. Свойства пределов.

При вычислении пределов последовательностей удобно использовать следующие их свойства. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогда

1) передел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей равен сумме (разности) их пределов: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;

2) предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

(следствие: постоянный множитель можно выносить за знак предела ($\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot a$));

3) предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{a}{b}\quad (b\neq 0,\, y_n\neq 0\ \forall n)$;

4) предел степени, являющейся сходящейся последовательностью, от сходящейся последовательности равен степени, равной пределу первой последовательности, от предела второй последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{\,b_n}\right)=\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=a^b$

(первое следствие: предел натуральной степени от сходящейся последовательности равен этой степени от ее предела ($\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^k=\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k=a^k$),

второе следствие: предел корня k- ой степени от сходящейся последовательности равен корню этой же степени от предела последовательности ($\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}=\sqrt[k]{a}$));

5) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$, и $\forall n$, начиная с некоторого числа N, $a_n\le c_n\le b_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=c$ (теорема о трех последовательностях).

III. Бесконечно малая последовательность.

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется ***бесконечно малой последовательностью***, если $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Отметим основные свойства бесконечно малых последовательностей:

1) сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;
2) произведение любого числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;
3) произведение бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ на ограниченную последовательность $\{a_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***бесконечно большой последовательностью***, если $\forall M>0\ \exists N_M$ такое, что $\forall n>N_M \quad |a_n|>M$.

Для бесконечно больших последовательностей будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Теорема. 1) Если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, то $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ - бесконечно большая последовательность. 2) Если $\{a_n\}$ - бесконечно большая последовательность, то $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ - бесконечно малая последовательность.

III. Вычисление пределов в случае неопределенностей.

При вычислении пределов алгебраических функций при $x\to x_0$ будем опираться на теорему об арифметических операциях над пределами и следствие из нее и некоторые дополнительные факты:

а) теорема: если существуют конечные пределы функций $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} q(x)=B$, то существуют пределы суммы, разности, произведения, частного этих функций и имеют место формулы

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm q(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} q(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot q(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} q(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x)=c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)=c\cdot A;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} q(x)}=\frac{A}{B}, B\neq 0, q(x)\neq 0;$$

б) следствие: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n = A^n$ и при $A \ge 0$ $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$, где $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$;

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)},\ \text{если } Q_m(x_0) \ne 0;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \infty,\ \text{если } Q_m(x_0) = 0, P_n(x_0) \ne 0;$$

г) если $P_n(x_0) = 0; Q_m(x_0) = 0,$ то предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$ представляет собой неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности нужно выделить множитель $(x - x_0)$ в числителе и знаменателе и сократить дробь на $(x - x_0)$;

д) если нужно вычислить предел рациональной функции, состоящей из алгебраической суммы дробей, то лучше привести их к общему знаменателю;

е) при вычислении пределов, содержащих иррациональности (в том случае, когда неприменима теорема о пределе частного), нужно перенести иррациональность из числителя в знаменатель или наоборот.

Необходимо иметь в виду, что чаще всего приходится иметь дело с неопределенностями. Их всего семь: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^{\infty}, 1^{\infty}, \infty^{0}$.

Замечательные пределы.

Замечательными пределами являются:

первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

и ***второй замечательный предел***

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Асимптотические формулы.

Теорема. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, т.е. функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to a$. Верно и обратное утверждение: если $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Рассмотрим первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Тогда $\frac{\sin x}{x}=1+\alpha(x)$, при этом $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$. Используя полученную формулу, представим функцию $\sin x$ в виде $\sin x = x + x\alpha(x)$. Так как $x\alpha(x)=o(x)$ (действительно $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$), перепишем найденную формулу в виде $\sin x = x + o(x)$.

Подобные формулы, которые называют ***асимптотическими формулами*** (или ***асимптотическими разложениями***, или ***асимптотическими представлениями функций)***, можно получить для многих функций. Для простейших элементарных функций справедливы оценки:

1) $\sin x = x + o(x)$;

2) $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$;

3) $a^x = 1 + x\ln a + o(x) \quad (a>0)$,

   $e^x = 1 + x + o(x)$;

4) $\ln(1+x) = x + o(x)$;

5) $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$;

6) $tg\, x = x + o(x)$;

7) $sh\, x = x + o(x)$;

8) $ch\, x = 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$;

9) $th\, x = x + o(x)$;

10) $\arcsin x = x + o(x)$;

11) $arctg\, x = x + o(x)$.

Эти формулы удобно использовать при нахождении пределов функций вида $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$, так как числитель и знаменатель обращаются в нуль при $x = 3$. Следовательно, имеется общий множитель $(x-3)$ в числителе и знаменателе. Выделим его, разделив многочлены на $(x-3)$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 4x^2 - 3x + 18 & x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 3x^2} & x^2 - x - 6 \\
\quad -x^2 - 3x + 18 & \\
\quad \underline{-x^2 + 3x} & \\
\qquad -6x + 18 & \\
\qquad \underline{-6x + 18} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 5x^2 + 3x + 9 & x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 3x^2} & x^2 - 2x - 3 \\
-2x^2 + 3x + 9 & \\
\underline{-2x^2 + 6x} & \\
\quad -3x + 9 &
\end{array}
$$

Имеем $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x^2 - x - 6)}{(x-3)(x^2 - 2x - 3)}$.

Вновь имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$ и еще раз выделяем множитель $(x-3)$, то есть

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-x-6)}{(x^2-2x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3+2}{3+1}=\frac{5}{4}.$$

Ответ: $\frac{5}{4}$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

Решение. Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на величину, сопряженную числителю. Получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{\sqrt[3]{x^2-9}\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{\sqrt[3]{x-3}\cdot\sqrt[3]{x+3}\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=$$

$$.$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3\cdot\sqrt[3]{(x-3)^3}}{\sqrt[3]{x-3}\cdot\sqrt[3]{x+3}\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{\cdot\sqrt[3]{x+3}\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=-3\frac{0}{\sqrt[3]{6}\cdot 8}=0.$$

Ответ: 0.

При вычислении пределов $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, которая раскрывается делением числителя и знаменателя на старшую степень x. При этом полезно меть в виду, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\infty, \text{ } если \quad n>m;\\ \frac{a_0}{b_0}, \quad если \quad n=m;\\ 0, \quad если \quad n<m.\end{cases}$$

Пример . Вычислить пределы числовых последовательностей

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\cdot\sqrt[3]{n^3-1}}$;

Решение.

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1-n^2-2n-1}{n^2+n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=3;$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\cdot\sqrt[3]{n^3-1}}$; старшая степень в числителе и знаменателе n^2, делим числитель и знаменатель на n^2, и получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{7}{6}}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{n\sqrt[3]{n^3-1}+\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt[3]{n^3-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}+\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}}=\frac{0+2}{1+0}=2;$$

Пример. Вычислить

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$

Решение. а) Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=4\lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=4\cdot 1\cdot 1=4;$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}=1,$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1-2n)=-\infty.$

При вычислении этого предела аналогично используем второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}-1\right)^{1-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=$$

$$=\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{\frac{4n^2+2n+3}{2n-4}}\right\}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\cdot(1-2n)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n^2+10n-4}{4n^2+2n+3}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Пример. Вычислить

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$;

Решение.

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2^{3x}-1)-(3^{5x}-1)}{\sin 7x-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\ln 2-5x\ln 3}{7x-2x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(3\ln 2-5\ln 3)}{5x}=\frac{3\ln 2-5\ln 3}{5}=\frac{1}{5}\ln\frac{8}{3^5}.$$

Тема 5.2. Производная.

I. Определение производной.

Приращением функции $y=f(x)$ в точке x, соответствующем приращению аргумента Δx, называется разность

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Определение. ***Производной функции*** $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю, если этот предел существует, т. е.

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Замечание. Иногда более удобно другое обозначение производной $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$.

Нахождение производной называют также ***дифференцированием*** функции.

Техника дифференцирования включает в себя знание производных простейших элементарных функций и знание основных правил дифференцирования.

II. Таблица производных основных элементарных функций

1) $(C)'=0$;

2) $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$;

3) $(\sin x)'=\cos x$;

4) $(\cos x)'=-\sin x$;

5) $(tg\, x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}\quad\left(x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\, k\in Z\right)$;

6) $(ctg\, x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\quad\left(x\neq\pi k,\, k\in Z\right)$;

7) $\left(a^x\right)'=a^x\ln a\quad(a>0,\, a\neq 1)$ (в частности, $\left(e^x\right)'=e^x$);

8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ $(x>0, a>0, a\neq 1)$ (в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$);

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$;

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$;

11) $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

12) $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

13) $(sh\, x)' = ch\, x$;

14) $(ch\, x)' = sh\, x$;

15) $(th\, x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$;

16) $(cth\, x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$.

III. Правила дифференцирования

1. ***Производная от суммы функций, умноженных на числа*** (свойство линейности производной)

$$[\alpha\, f(x) \pm \beta\, g(x)]' = \alpha\, f'(x) \pm \beta\, g'(x).$$

2. ***Производная от произведения функций***

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

3. ***Производная от частного***

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

4. ***Производная от обратной функции***: пусть $y = f(x)$, а $x = \varphi(y)$, т.е. f и φ - взаимно обратные функции, тогда

$$[f(x)]' = \frac{1}{[\varphi(y)]'}.$$

Замечание. При нахождении производной функции $f(x)$ по этой формуле после вычисления производной в правой части следует выразить, используя формулу $y = f(x)$, y через x, например,

$$(arctg\, x)' = \frac{1}{(tg\, y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+tg^2(arctg\, x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. ***Производная сложной функции*** $y = f(g(u(v(x))))$

$$f_x'(x) = f_g'(g) g_u'(u) u_v'(v) v_x'(x).$$

Замечание. Нижние индексы у функций показывают переменные, по которым производят дифференцирование.

Пример. $[\sin(ch(\ln(1+x^2)))]' = \cos(ch(\ln(1+x^2))) \cdot sh(\ln(1+x^2)) \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$.

6. ***Дифференцирование функции, заданной параметрически*** $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$

Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют производные и $\varphi'(t) \neq 0$, тогда функция $y = f(x)$ также имеет производную, причем

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

т. е. производная $f'(x)$ является функцией параметра t, который, однако, может быть иногда исключен с помощью обратной функции $t = \varphi^{-1}(x)$.

7. ***Дифференцирование векторной функции.***

Рассмотрим закон движения частицы, описываемый радиус-вектором $\vec{r}(t)$. Чтобы найти скорость частицы, разложим радиус-вектор по базисным ортам $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Тогда $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$.

8. ***Производная неявной функции.***

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявным образом, т. е. в виде уравнения $F(x, y) = 0$. Производную $y'(x)$ можно найти дифференцированием уравнения $F(x, y) = 0$ по переменной x, учитывая, что y является функцией этой переменной.

Пример. Рассмотрим уравнение, задающее функцию $y(x)$ неявным образом, $e^y + \sin y + x^2 + x - 1 = 0$. Продифференцируем это уравнение $e^y y' + \cos y \cdot y' + 2x + 1 = 0$. Выразим из полученного выражения нужную нам производную $y'(x) = -\frac{2x+1}{e^y + \cos y}$. Эта производная является функцией двух переменных x и y. Заметим, что эту функцию можно, используя уравнение $F(x,y)=0$, записать в другом виде $y'(x)=\dfrac{2x+1}{\sin y-\cos y+x^2+x-1}$.

9. ***Логарифмическое дифференцирование.***

При логарифмическом дифференцировании находится производная не самой функции, а ее логарифма $[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (***логарифмическая производная)***. С помощью такого дифференцирования удобно находить производные от функций вида $y=f(x)^{g(x)}$. Сначала логарифмируем это выражение $\ln y=\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)=g(x)\ln f(x)$, а затем находим логарифмическую производную $\dfrac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Легко теперь получить нужную нам производную $y'=y\left(g'\ln f+g\dfrac{f'}{f}\right)=f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)$.

Пример. Вычислим производную функции $y=(\sin x)^{tgx}$. Вычисляем логарифмическую производную $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x+tg\,x\dfrac{\cos x}{\sin x}$. Окончательно находим $y'=(\sin x)^{tgx}\left(1+\dfrac{\ln\sin x}{\cos^2 x}\right)$.

Также имеет смысл использовать логарифмическое дифференцирование при нахождении производных функций вида $y=\dfrac{f(x)g(x)u(x)}{v(x)s(x)}$, так как $\ln y=\ln f(x)+\ln g(x)+\ln u(x)-\ln v(x)-\ln s(x)$.

Пример. Вычислим производную функции $y=\dfrac{\cos^5 x\sqrt[7]{\sin^2 x}}{5^x tg^2 x}$. Находим логарифм этой функции $\ln y=5\ln\cos x+\dfrac{2}{7}\ln\sin x-x\ln 5-2\ln tg\,x$. Вычисляем логарифмическую производную $\dfrac{y'}{y}=5\dfrac{(-\sin x)}{\cos x}+\dfrac{2}{7}\dfrac{\cos x}{\sin x}-\ln 5-2\dfrac{1}{tg\,x\cdot\cos^2 x}$.

Откуда $y'=\dfrac{\cos^5 x\sqrt[7]{\sin^2 x}}{5^x tg^2 x}\left(\dfrac{2}{7}ctg\,x-5tg\,x-\dfrac{4}{\sin 2x}-\ln 5\right)$.

Дифференциал функции.

Определение. ***Дифференциалом*** (или первым дифференциалом) ***функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 называется величина, пропорциональная бесконечно малому приращению аргумента Δx и отличающаяся от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx.
Дифференциал функции обозначается через dy или $df(x)$. Следовательно, $dy = f'(x_0)\Delta x$.
Определение. ***Дифференциалом независимой переменной*** x называется приращение этой переменной, т.е. $dx = \Delta x$.
Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x имеет вид $dy = f'(x)dx$, откуда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.
Замечание. Формулу $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ можно использовать для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ по известным значениям $f(x_0),\ f'(x_0)$ и Δx.
Некоторые свойства дифференциала функции:

1) ***линейность***

$$d(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)) = \alpha\, df(x) + \beta dg(x);$$

2) ***дифференциал произведения***

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg;$$

3) ***дифференциал частного***

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g + f \cdot dg}{g^2};$$

4) ***инвариантность дифференциала***

$$y = F(\varphi(x)):\quad dF = F'_x dx \ \ и \ \ dF = F'_\varphi d\varphi.$$

Уравнения касательной и нормали к кривой.

Так как значение производной в точке $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, само уравнение касательной имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

а уравнение

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

является уравнением нормали к графику этой функции в этой же точке.

Интервалы возрастания и убывания функций, экстремумы функций, выпуклость функций и точки перегиба, асимптоты графиков функций, исследование функций и построение графиков.

1. Условия монотонности функции.

Интервалы возрастания и убывания функции можно определить, изучая поведение ее первой производной. Если функция $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) (возможны случаи $a = \infty$ или $b = \infty$) и для любого $x \in (a, b)$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

2. Экстремумы функции.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой локального максимума (локального минимума)***, если существует такая окрестность $U(x_0)$ этой точки, что $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in U(x_0), x \ne x_0 \quad (f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x \in U(x_0), x \ne x_0)$. Точки локального максимума и минимума называются ***точками локального экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами*** функции.

Определение. Точки области определения непрерывной функции $f(x)$, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются ***критическими точками*** функции.

Точки экстремума с необходимостью должны быть критическими точками (но не наоборот). Сформулируем достаточные условия экстремума функции.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности (кроме, может быть, самой точки x_0). Тогда, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, эта критическая точка является точкой локального экстремума. При этом, если $f'(x) > 0$ левее точки x_0 (для $x < x_0$) и $f'(x) < 0$ правее этой точки (для $x > x_0$), то x_0 - точка локального максимума. Если знак у первой производной меняется противоположным образом, то x_0 - точка локального минимума.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда если n - четное число, то x_0 - точка локального экстремума. При этом, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 - точка локального минимума. Если же $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 - точка локального максимума.

Пример . Вычислить производную функции:

y=-x^4+x^3-3x+5

Решение:

Для решения применим формулы ($(u+v)' = u' + v'$; $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(kf(x))' = kf'(x)$; $(c)' = 0$; $(kx+b)' = k$):

$y' = (x^4 + x^3 - 3x + 5)' = 4x^3 + 3x^2 - 3$.

Ответ. $4x^3 + 3x^2 - 3$

Пример. Вычислить производную сложной функции:

$y = \dfrac{3x+4}{2x-6}$

Решение:

Для решения применим формулы($(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$; $(kx+b)' = k$; $(c)' = 0$)

$$y' = (\frac{3x+4}{2x-6})' = \frac{(3x+4)'(2x-6) - (3x+4)(2x-6)}{(2x-6)^2} = \frac{3(2x-6) - (3x+4)^2}{(2x-6)^2} = \frac{6x - 18 - 6x - 8}{(2x-6)^2} = \frac{-26}{(2x-6)^2}$$

Ответ. $\dfrac{-26}{(2x-6)^2}$

Пример. Вычислить производную сложной функции

$y = \ln(2x+3)$

Решение:

Для решения применим формулы $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$; $(kx+b)' = k$:

$y' = (\ln(3x-4))' = \frac{1}{3x-4} \cdot (3x-4)' = \frac{3}{3x-4}$.

Ответ. $\frac{3}{3x-4}$

Пример. Вычислить производную сложной функции

$y = e^{3x-6}$

Решение:

Для решения применим формулы $(e^{n})' = e^{u} \cdot u'$; $(kx+b)' = k$:

$y' = (e^{3x-6})' = e^{3x-6} \cdot (3x-6)' = 3e^{3x-6}$

Ответ. $3e^{3x-6}$

Пример. Вычислить приближенное значение функции, точное значение функции, найти погрешность вычисления.

1.Точное значение:

$y = 2x^2 - 4x + 1$, при $x = 1{,}01$

$y(1{,}01) = 2 \cdot (1{,}01)^2 - 4 \cdot 1{,}01 + 1 = -0{,}9998$

2.Приближенное значение

$y = 2x^2 - 4x + 1$, при $x = 1{,}01$

x=1+0,01

$x_0 = 1$

$f'(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = -1$

$f'(x) = (2x^2 - 4x + 1)' = 4x - 4$

$f'(0) = f'(1) = 4 \cdot 1 - 4 = 0$

$dy = 0 \cdot 0{,}01 = 0$

$y(1{,}01) = -1 + 0{,}01 = -0{,}99$

3.Абсолютная и относительная погрешности:

1)$\mathbf{\Delta} = |x - a|$

$\mathbf{\Delta} = |-0{,}99 - (-0{,}9998)| = 0{,}0098$

2) $\delta = \dfrac{\Delta}{x}$

$\delta = \dfrac{0{,}0098}{-0{,}99}$

Пример . нахождение наибольших и наименьших значений реальных величин.

1) Найдем дифференциал функции:

$y' = (2x^3 + 3x^2 + 2)' = 6x^2 + 6x$

2) $y'(x) = 0$

$6x^2 + 6x = 0$

$6x(x+1) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -1$ x_1, x_2-критические точки

$0 \in [-2; 1]$ – да

$-1 \in [-2; 1]$ – да

3)$y(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 2 = -16 + 12 + 2 = -2$

$y(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2$

$\max\limits_{[-2;1]} y(x) = y(1) = 7$

$\min\limits_{[-2;1]} y(x) = y(-2) = -2$

Пример. Закон движения тела задан формулой $\boldsymbol{S = 5t - 0{,}5t^2}$ (м), где t- время в секундах. Найти скорость в конце 4 секунды.

1)Найдем дифференциал функции;

2)Подставим вместо t значение времени.

U(t)=S'(t)

U(t)=S'(t)=5-t

U(4)=5-4=1

Ответ:1м/с

Пример. Исследовать с помощью производной функцию и построить график функции $y = x^3 - 3x^2$

«»

<u>Схема построения графика функции с помощью производной:</u>

1)Найти D(y) область определения;

2)Проверит на четность/нечетность;

3)Найти пересечения с осями с Ох:у=0 (не всегда), с Оу:х=0

4)Проверить на экстремум;

5)Найти выпуклость и вогнутость промежутков;

6)Найти дополнительные точки(если потребуется)

$D(y)=(-\infty;\infty)$

$y(-x)=-y(x)$ – нечетная

$x^3-3x^2=0$ (нужно приравнять к нулю)

$x^2(x-3)=0$

$x=0$

$x=3$

Экстремум:

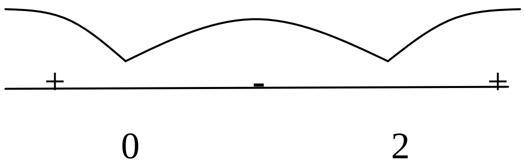
$y'=(x^3-3x^2)'=3x^2-6x$ (находим производную от функции)

$y'=0,\ 3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$x=0$

$x=2$



$x=0$ – точка максимума

$y(0)=0$; (0;0) – точка максимума

$x=2$ – точка минимума

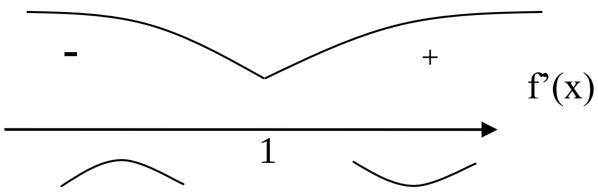
$y(2)=-4$; (2;4)- точка минимума

Выпуклость и вогнутость

$y'=(x^3-3x^2)=3x^2-6x$

$y''=(y')'=(3x^2-6x)=6x-6$

$y''=0,\ 6x-6=0$



x=1 f(x)

x=1 – точка перегиба

y(1)=1-3=-2

(1;-2) - точка перегиба

График функции выпуклый вверх.

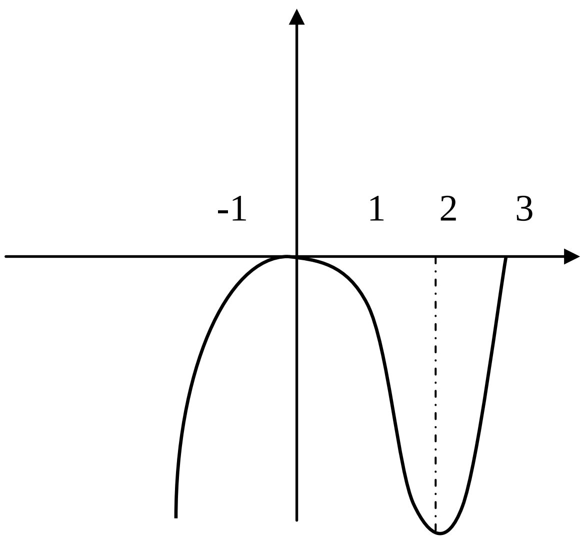
6)Дополнительные точки

y(-2)=-20

y(-1)= - 4

y(2)= - 4

y(3)=0



Тема 5.3. Интеграл

Вводная информация

Определение. Функция $F(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, называется ***первообразной*** функции $f(x)$, заданной на этом же отрезке, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Операция нахождения первообразной заданной функции $f(x)$ называется ***интегрированием*** этой функции.

Определение. Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается

$\int f(x)dx = F(x) + C$,

где $F(x)$ - любая первообразная функции $f(x)$, C - произвольная постоянная. Знак $\int$ называется ***интегралом***, функция $f(x)$ - ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ - ***подынтегральным выражением***.

Отметим основные свойства неопределенного интеграла.

1) $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$ (линейность интеграла);

2) $d\int f(x)dx=f(x)dx \quad \left(\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)\right)$;

3) $\int dF(x)=F(x)+C \quad \left(\int f'(x)dx=f(x)+C\right)$.

Техника интегрирования функций опирается на знание интегралов от основных элементарных функций и знание методов интегрирования.

Таблица интегралов от элементарных функций

1) $\int A dx=Ax+C$;

2) $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$;

3) $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$;

4) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$;

5) $\int\cos x\,dx=\sin x+C$;

6) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C, \quad (a>0,\, a\neq 1), \quad \left(\int e^x dx=e^x+C\right)$;

7) $\int\log_a x\,dx=\frac{x\ln x-x}{\ln a}+C, \quad (a>0,\, a\neq 1), \quad \left(\int\ln x dx=x\ln x-x+C\right)$

8) $\int tg\,x\,dx=-\ln|\cos x|+C$;

9) $\int ctg\,x\,dx=\ln|\sin x|+C$;

10) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\begin{cases}\arcsin\frac{x}{a}+C,\\ -\arccos\frac{x}{a}+C, \quad (a>0,\, x^2<1;)\end{cases}$

11) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0); \end{cases}$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C$;

13) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C, \quad (a \neq 0)$;

14) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$;

15) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$;

16) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$;

17) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

18) $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C$;

19) $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C$;

20) $\int th\, x\, dx = \ln|ch\, x| + C$;

21) $\int cth\, x\, dx = \ln|sh\, x| + C$.

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример*:* Вычислите $\int (x^3 - 3x + \sin x) dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:

$$\int (x^3 - 3x + \sin x)dx = \int x^3 dx - 3\cdot\int xdx + \int \sin xdx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} - \cos x + C =$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}\cdot x^2 - \cos x + C$$

Пример: Вычислите $\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

$$\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx = \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{2x}{x}dx - \int \frac{x^2}{x}dx = 3\cdot\int \frac{dx}{x} + 2\cdot\int dx - \int xdx = 3\ln x + 2x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + c$$

2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих вомногих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

$C + F(x) = \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$ или

$\int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Последнее равенство называется ***формулой замены переменной*** в неопределенном интеграле.

Пример: Вычислите $\int (3x-4)^3 dx$

Решение: Введем новую переменную $t = 3x\text{-}4$, тогда $dt = t'\cdot dx = (3x-4)'\cdot dx = 3dx$, откуда $dx = \frac{dt}{3}$. Подставим новую переменную в интеграл (вместо выражения $3x\text{-}4$ подставим t, вместо dx подставим $\frac{dt}{3}$).

$$\int (3x-4)^3 dx = \int t^3\cdot\frac{dt}{3} = \frac{t^4}{12} + C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо *t* подставим выражение *3x-4*), получим окончательный ответ.

$$\int (3x-4)^3 dx = \frac{(3x-4)^4}{12} + C$$

«Вычисление определенного интеграла методом непосредственного интегрирования».

Определение. ***Определенным интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремиться к нулю.

Определенный интеграл обозначают выражением $\int_a^b f(x)dx$.

a и b – пределы интегрирования

a – верхний предел

b - нижний предел

Вычисление определенного интеграла.

Теорема. Для кусочно-непрерывных функций справедлива ***формула Ньютона-Лейбница***

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$ в смысле расширенного определения.

Порядок вычисления определенного интеграла:

Найти неопределенный интеграл от данной функции.

В полученную первообразную подставить вместо аргумента сначала верхний, затем нижний предел интеграла.

Из результата подстановки верхнего предела вычесть результат подстановки нижнего предела.

Перечислим некоторые ***свойства определенного интеграла.***

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$ (определенный интеграл не зависит от обозначения переменной).

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

При вычислении определенного интеграла используются те же методы, что и для неопределенного интеграла с небольшими изменениями.

Метод замены переменной.

Теорема. Пусть:

1) $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$;

2) $x = \varphi(t)$ определена и непрерывна вместе с производной на отрезке $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$ и $a \le \varphi(t) \le b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Метод интегрирования по частям

Теорема. Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют непрерывные производные на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

где $f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 2x^2 dx$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2 dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3-1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. (3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$

Как правильно провести замену. Смотрим в таблицу интегралов и прикидываем, на что у нас больше всего похожа подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C$ замена: $t = x^2$:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = (*)$$

$$dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$$

Находим новые пределы интегрирования.

Смотрим на нашу замену $t = x^2$ и старые пределы интегрирования $a = 0 \;\; b = \sqrt{3}$.

Сначала подставляем в выражение замены $t = x^2$ нижний предел интегрирования, то есть, ноль:

$t_1 = 0^2 = 0$

Потом подставляем в выражение замены $t = x^2$ верхний предел интегрирования, то есть, корень из трёх:

$t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\right)\Big|_0^3 \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left(3+\sqrt{25}\right)-\ln\left(0+\sqrt{0+16}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 4)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right)=\frac{\ln 2}{2}\approx 0{,}35$$

(1) В соответствии с заменой записываем новый интеграл с новыми пределами интегрирования.

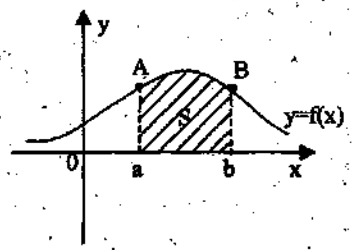
(2) Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Константу $\frac{1}{2}$ лучше оставить за скобками. Справа отчеркиваем линию с указанием новых пределов интегрирования $\Big|_0^3$ – это подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

3.**Нахождение площади криволинейной трапеции.**

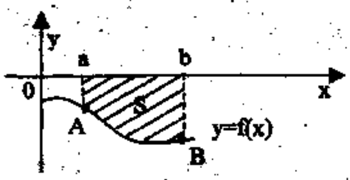
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)*, двумя прямыми *x=a* и *x=b* и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:

1.



$$S=\int_a^b f(x)dx$$

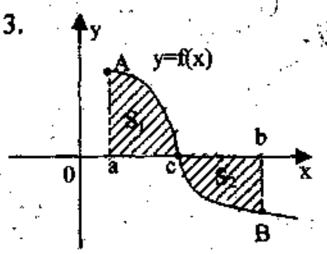
2.



$$S_{aABb}=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

21

3.



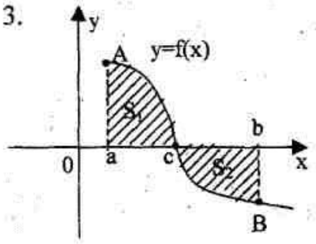
$f(x)=0\Rightarrow x=c$

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

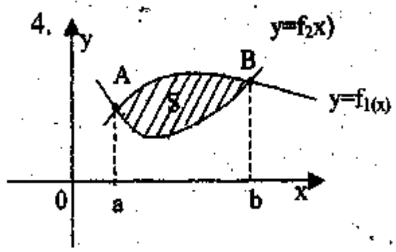
3.

$f(x)=0\Rightarrow x=c$

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$



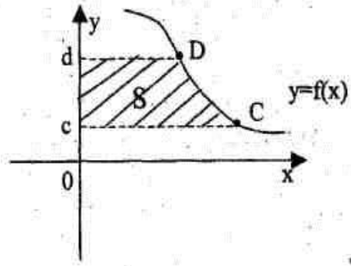
4.



$f_1(x)=f_2(x)\Rightarrow x_1=a, x_2=b$

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx$$

5.

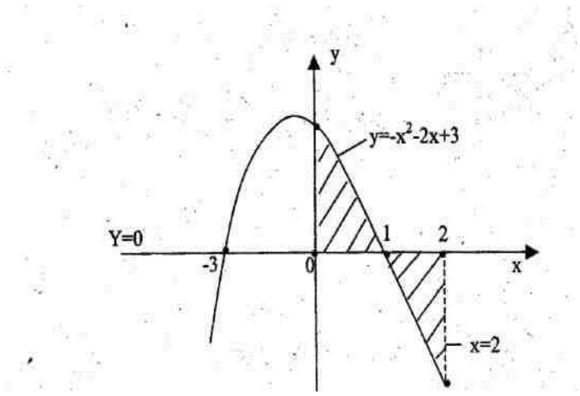


$y=f(x)\Rightarrow x=\varphi(y)$

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy$$

Пример*:* Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой *x=2*.

Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох: $y=-x^2-2x+3$, $-x^2-2x+3=0$, $x_1=1,\ x_2=-3$

$$S=\int_0^1(-x^2-2x+3)dx-\int_1^2(-x^2-2x+3)dx=\left.(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\right|_0^1+\left.(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\right|_1^2=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-(-\frac{8}{3}-4+6)+(-\frac{1}{3}-1+3)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4(кв.ед.)$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции y= x^2 прямыми x=-1 и x=2 и осью OX

Решение:

Порядок вычисления определенного интеграла:

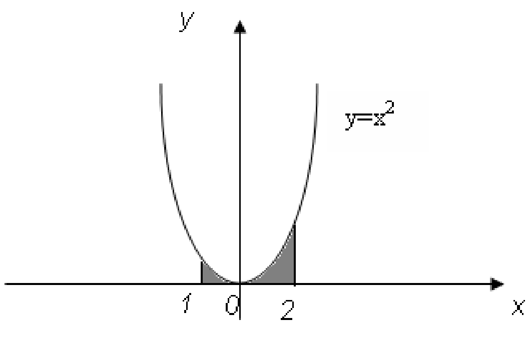
Построить график функции y=x^2(парабола) x=-1,x=2

Заштриховать полученную фигуру, ограниченную этими графиками и осью OX

Применить формулу для вычисления площади полученной фигуры $S=\int_a^в f(x)dx$

Применить формулу Ньютона-Лейбница:

$$S=\int_a^в f(x)dx=f(x)\Big|_a^в=f(в)-f(a)$$



$$S=\int_{-1}^{2}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\,\Big|_{-1}^{2}=\frac{1}{3}(2^3-(-1)^3)=$$

$$=\frac{1}{3}(8+1)=\frac{1}{3}\cdot 9=3$$

Ответ: 3 кв. ед.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции y=2x-3 и прямыми x=3; x=-1 осью OX.

Решение:

Построить график функции y=2x-3(это будет прямая)

Делать решение как в задание №1

Применим формулы:

$$S=\int_a^в f(x)dx=f(x)\Big|_a^в=f(в)-f(a);$$ S=S_1+S_2

$$\int dx=x+c;\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c;\int_a^b cdx=c\int_a^b dx:$$

Найдем пересечения с осью OX, для этого

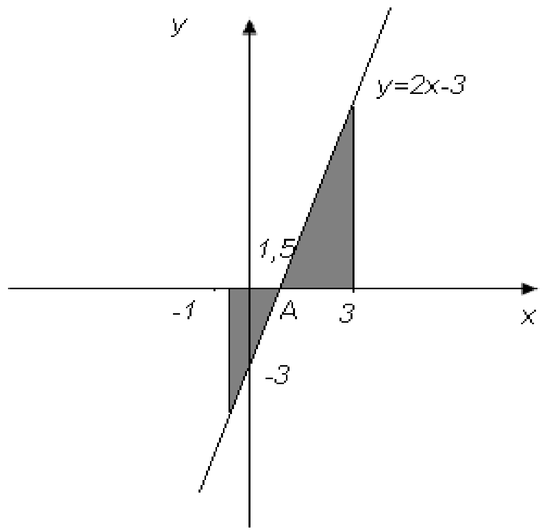
y=0, A(1,5;0)

y=2x-3

2x-3=0

2x=3

x=1,5.



$$S_1=\int_{-1}^{1,5}(2x-3)dx=2\int_{-1}^{1,5}xdx-3\int_{-1}^{1,5}dx=$$

$$=x^2\Big|_{-1}^{1,5}-3x\Big|_{-1}^{1,5}=(1,5^2-(-1)^2)-3(1,5+1)=2,25-7,5=-5,25$$

$$|S_1|=|-5,25|=5,25$$

$$S_2=\int_{1,5}^{3}(2x-3)dx=2\int_{1,5}^{3}xdx-3\int_{1,5}^{3}dx=x^2\Big|_{1,5}^{3}-3x\Big|_{1,5}^{3}$$

$$=(3^2-1,5^2)-3(3-1,5)=6,75-4,5=2,25$$

S=5,25+2,25=7,5

Ответ: 7,5 кв.ед.

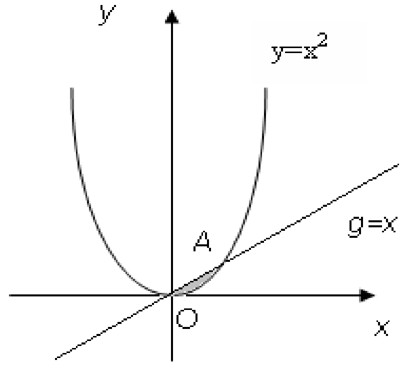
Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2$ и $g=x$.

Решение:

1. Построить график функции $y=x^2$(парабола) и $g=x$(прямая)

2.Найдем координаты их точек пересечения для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$$



$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0$ и $x=1$

$y_1=0, y_2=1$: O(0;0), A(1,1). Данные точки помогают построить верный график.

$$S = \int_a^в f(x)dx = f(x)\Big|_a^в = f(в) - f(a)$$; $S=S_1+S_2$

$$\int dx = x + c; \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \int_a^b c dx = c\int_a^b dx:$$

$$S = \int_0^1 (x - x^2)dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) - \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$ (*кв.ед.*)

Раздел 6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

Тема 6.1Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$P_n = n!$,

где $n! = 1 * 2 * 3 \ldots n$.

Заметим, что удобно рассматривать 0!, полагая, по определению, 0! = 1.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$A^m_n = n (n - 1)(n - 2) \ldots (n - m + 1)$.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$C^m_n = n! / (m! (n - m)!)$.

Пример перестановок. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Р е ш е н и е. Искомое число трехзначных чисел

$P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$.

Пример размещений. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Р е ш е н и е. Искомое число сигналов

$A^2_6 = 6 * 5 = 30.$

Пример сочетаний. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов

$C^2_{10} = 10! / (2!\ 8!) = 45.$

Замечание. Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями

$P_n (n_1, n_2, ...) = n! / (n_1!\ n_2!\ ...),$

где $n_1 + n_2 + ... = n$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект В может быть выбран n способами, то выбрать либо А, либо В можно m + n способами.

Правило произведения. Если объект А можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то пара объектов (А, В) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

Тема 6.2 Элементы теории вероятностей

Вероятностью Р(А) события А в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию А, к числу n всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число Р(А), называемое вероятностью события А.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю Р=0.

Вероятность достоверного события равна единице Р=1.

Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1: $0<P(A)<1$.

Пример: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Пример: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$$n_1 = 10$$
$$m_1 = 4$$
$$p_1 = \frac{4}{10}$$
$$n_2 = 10$$
$$m_2 = 3$$
$$p_2 = \frac{3}{10}$$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0,12$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) + ...$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(A) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(H_i / A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A/H_i)}{p(A)}$$

Пример: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$$n = 20 + 30 + 50 = 100$$

$$p(\mathrm{H}_1) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$p(\mathrm{H}_2) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$p(\mathrm{H}_3) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) = 0,7$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) = 0,8$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) = 0,9$$

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) =$$
$$= 0,2\cdot 0,7 + 0,3\cdot 0,8 + 0,5\cdot 0,9 = 0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(\mathrm{H}_1/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1)}{p(\mathrm{A})} = \frac{0,2\cdot 0,7}{0,83} \approx 0,169$$

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\, p^m (1-p)^{n-m}, m = 0,1,2,...,n$

Пример: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$$p = 0,2$$
$$n = 6$$
$$m = 2$$

$$P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\, p^m (1-p)^{n-m} = \mathrm{C}_6^2\, 0,2^2 (1-0,2)^{6-2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,04\cdot 0,8^4 \approx 0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m} \geq 1) = 1 - \mathrm{q}^n, q = 1 - p$

Пример: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$$p = 0,6 \Rightarrow \quad q = 0,4$$
$$n = 6$$
$$m \geq 1$$
$$P_6(\mathrm{m} \geq 1) = 1 - 0,4^6 \approx 0,9959$$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(\mathrm{m}_1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{m}_2) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(\mathrm{m})$

Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина X – это числовая функция $X = f(\omega_i)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(\text{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(\text{X}) = M(\text{X} - M(\text{X}))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(\text{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m\right)^2 p_i$$

$$D(\text{X}) = M(\text{X}^2) - (M(\text{X}))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(\text{X}) = \sqrt{D(\text{X})}$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(\text{X}) = \text{np} \quad D(\text{X}) = \text{npq}$$

Пример : Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти M(X), D(X), σ(X).

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(\text{X}) = 2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}4 + 8 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 + 2 + 2{,}4 + 1{,}8 = 6{,}4$$
$$M(\text{X}^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}4 + 64 \cdot 0{,}3 + 81 \cdot 0{,}2 = 45{,}8$$
$$D(\text{X}) = 45{,}8 - 6{,}4^2 = 4{,}84$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(\text{X})} = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2$$

Пример: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 100 \cdot 0,05 = 5$$
$$D(\mathrm{X}) = 100 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 4,75$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4,75} = 2,18$$

Тема 6.3. Представление данных (таблицы, диаграммы, графики)

Математической статистикой называют раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования *статистических данных* для научных и практических выводов. Статистические данные здесь понимаются как сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

Задачи математической статистики

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей ***статистических данных*** - результатов наблюдений.

Статистические данные представляют собой данные, полученные в результате обследования большого числа объектов или явлений; следовательно, математическая статистика имеет дело с массовыми явлениями.

Генеральная и выборочная совокупность статистических данных

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого ***качественного*** или ***количественного*** признака, характеризующего эти объекты.

Качественными признаками объект обладает либо не обладает. Они не поддаются непосредственному измерению (например, спортивная специализация, квалификация, национальность, территориальная принадлежность и т. п.).

Количественные признаки представляют собой результаты подсчета или измерения. В соответствии с этим они делятся на дискретные и непрерывные.

Иногда проводиться ***сплошное*** обследование, т.е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению. Различают ***генеральную*** и ***выборочную*** совокупности.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной (основной) совокупностью называют совокупность, объектов из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из ***1000*** деталей отобрано для обследования ***100*** деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$. Число объектов генеральной совокупности N значительно превосходит объем выборки n .

Способы выборки

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли (выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности) - выборка должна быть ***репрезентативной (представительной)***.

Выборка будет ***репрезентативной***, если:

- каждый объект выборки ***отобран случайно*** из генеральной совокупности;
- все объекты имеют ***одинаковую вероятность*** попасть в выборку.

Способы группировки статистических данных

Обычно полученные наблюдаемые данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, трудно выявить какую-либо закономерность их варьирования (изменения). Для изучения закономерностей варьирования значений случайной величины опытные данные подвергают обработке.

Дискретный вариационный ряд

Пример 1. Проводились наблюдения над числом $\boldsymbol{X}$ оценок полученных студентами ВУЗа на экзаменах. Наблюдения в течение часа дали следующие результаты: 3; 4; 3; 5; 4; 2; 2; 4; 4; 3; 5; 2; 4; 5; 4; 3; 4; 3; 3; 4; 4; 2; 2; 5; 5; 4; 5; 2; 3; 4; 4; 3; 4; 5; 2; 5; 5; 4; 3; 3; 4; 2; 4; 4; 5; 4; 3; 5; 3; 5; 4; 4; 5; 4; 4; 5; 4; 5; 5; 5. Здесь число $\boldsymbol{X}$ является дискретной случайной величиной, а полученные о ней сведения представляют собой ***статистические (наблюдаемые) данные***.

Расположив приведенные выше данные в порядке ***неубывания*** и ***сгруппировав*** их так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины будут одинаковы, получают ***ранжированный ряд*** данных наблюдения.

В примере 1 имеем четыре группы со следующими значениями случайной величины: 2; 3; 4; 5. Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называют ***вариантом***, а изменение этого значения ***варьированием***.

Варианты обозначают малыми буквами латинского алфавита с соответствующими порядковому номеру группы индексами - x_i. Число, которое показывает, сколько раз встречается соответствующий вариант в ряде наблюдений называют ***частотой*** варианта и обозначают соответственно - n_i.

Сумма всех частот ряда $\sum n_i = n$ - объем выборки. Отношение частоты варианта к объему выборки $n_i / n = w_i$ называют ***относительной частотой***.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот

Для наглядности строят различные графики статистического распределения.

Пример 1.1. Имеются данные о количестве дежурств сотрудниками кафедры за месяц. Произведена выборка объемом $n = 15$:

3 0 5 7 4 3 1 9 5 3 4 4 2 8 5.

Составить статистический вариационный ряд распределения частот (абсолютных и относительных).

Решение

1. Расположить значения выборки в возрастающем порядке:

0 1 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 7 8 9.

Имеем девять различных значений.

2. Найти абсолютные частоты появления каждого значения выборки:

$n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 3$, $n_5 = 3$, $n_6 = 3$, $n_z = 1$, $n_8 = 1$, $n_9 = 1$.

Проверить первое условие нормировки:

$$n = \sum_{i=1}^{9} n_i = 1+1+1+3+3+3+1+1+1=15$$

3. Вычислить относительные частоты появления каждого значения выборки по формуле $p_i^* = n_i \ / n$:

$p_1^* = 1/15$, $p_2^* = 1/15$, $p_3^* = 1/15$, $p_4^* = 3/15$, $p_5^* = 3/15$, $p_6^* = 3/15$, $p_7^* = 1/15$, $p_8^* = 1/15$, $p_9^* = 1/15$.

Проверить второе условие нормировки:

$$p^* = \sum_{i=1}^{9} p_i^* = \frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=1 .$$

4. Внести полученные данные в таблицу:

значение варианты	0	1	2	3	4	5	7	8	9
абсолютная частота n_i	1	1	1	3	3	3	1	1	1
относительная частота p_i^*	1/15	1/15	1/15	3/15	3/15	3/15	1/15	1/15	1/15

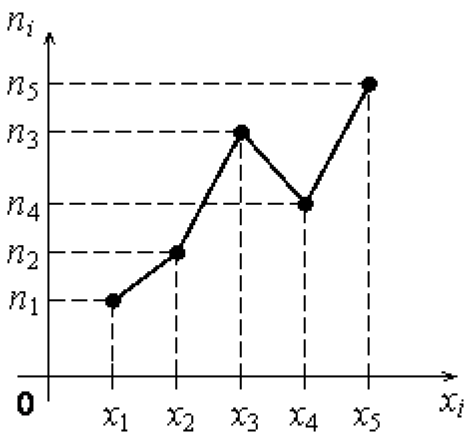
Задача решена.

Для геометрического изображения такого статистического распределения служит *полигон частот* (рис. 1.1) или *полигон относительных частот.*

Полигоном частот называют *ломаную линию, отрезки, которой соединяют точки* $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$, …, $(x_k;n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i.

Полигоном относительных частот называют *ломаную линию, отрезки которой соединяют точки* $(x_1;\ p_1^*)$, $(x_2;\ p_2^*)$, … , $(x_k;\ p_k^*)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты p_i^*.

Статистическое распределение можно задать также в виде *последовательности интервалов* и соответствующих им частот. Статистический ряд в таком случае называется ***интервальным статистическим рядом***. Для геометрического изображения такого статистического распределения служит *гистограмма* (рис. 1.2).



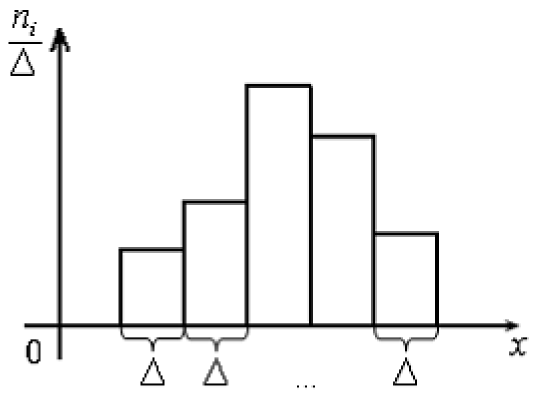


Рис. 1.1. Полигон частот

Рис. 1.2. Гистограмма с равными интервалами

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, основанием i-го прямоугольника которой являются частичные интервалы длиною Δ_i, и высотой n_i/Δ_i. Площадь одного прямоугольника равна n_i.

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/Δ_i.

В практике для удобства вычислений обычно используют ряды с равными интервалами (Δ).

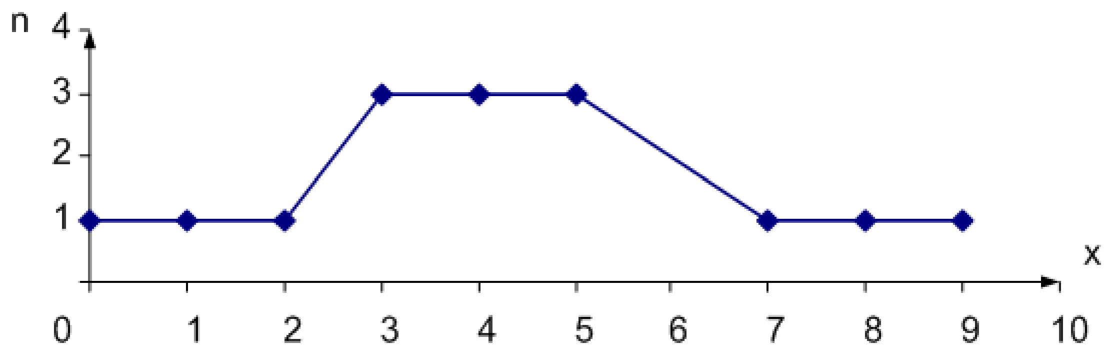
Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною Δ_i, а высоты равны отношению p_i^* / Δ_i.

Пример 1.2. Построить полигон частот статистического вариационного ряда, составленного в примере 1.1.

Решение

1. Отметить на плоскости точки с координатами (0;1), (1;1), (2;2), (3;3), (4;3), (5;3), (7;1), (8;1), (9;1).

2. Построить ломаную, соединив точки отрезками.



Для построения интервального ряда необходимо выполнить следующее.

1. Определить объем выборки n, максимальное x_{max} и минимальное x_{min} значения элементов выборки.

2. Определить размах выборки R, $R = x_{max} - x_{min}$.

3. Определить количество интервалов k по одной из формул:

$k = 1 + 3{,}32 \cdot \lg(n) = 1 + 1{,}41 \cdot \ln(n)$.

Округление дробных чисел до целого проводится по правилам округления. Число интервалов должно быть таким, чтобы таблица не была слишком громоздкой, а с другой стороны, чтобы в ней не исказились особенности изучаемого признака. Как правило, оптимальное количество интервалов составляет 5–10.

4. Определить оптимальную длину h интервала: $h = R / (k - 1)$.

5. Определить границы разрядов. Для этого сначала определяем начальную границу a_0: $a_0 = x_{min} - h / 2$. Промежуточные и конечная границы интервалов определяются по формуле $a_i = a_{i-1} + h$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

6. Составить последовательность интервалов и записать ее в первую строку таблицы (ряда распределения).

7. Найти абсолютные частоты n_i и записать их во вторую строку таблицы. Значение, находящееся на границе двух интервалов, относят к правой границе интервала.

8. Определить относительные частоты и записать их в третью строку таблицы.

Пример 1.3. Используя условие примера 1.1, составить интервальный статистический ряд.

Решение

1. Определить n, x_{max}, x_{min} : $n = 15$, $x_{max} = 9$, $x_{min} = 0$.

2. Определить размах выборки R: $R = 9 - 0 = 9$.

3. Определить количество интервалов k:

$k = 1 + 1{,}41 \cdot ln15 = 1 + 3{,}81 = 4{,}81 \approx 5$.

4. Определить длину h интервала: $h = 9 / (5 - 1) = 2{,}25$.

5. Определить границы разрядов:

$a_0 = 0 - 2{,}25 / 2 = -1{,}125$; $a_1 = -1{,}125 + 2{,}25 = 1{,}125$; $a_2 = 1{,}125 + 2{,}25 = 3{,}375$; $a_3 = 3{,}375 + 2{,}25 = 5{,}625$; $a_4 = 5{,}625 + 2{,}25 = 7{,}875$; $a_5 = 7{,}875 + 2{,}25 = 10{,}125$.

6. Заполнить строки таблицы, определив абсолютную и относительные частоты:

интервал	(–1,125;1,125]	(1,125;3,375]	(3,375;5,625]	(5,625;7,875]	(7,875;10,125]
абсолютн	2	4	6	1	2

ая частота n_i					
относительная частота p_i^*	2/15	4/15	6/15	1/15	2/15

Пример 1.4. Построить гистограмму частот интервального статистического ряда, составленного в примере 1.3.

Решение

1. Отметить на оси абсцисс частичные интервалы.

2. Для каждого интервала найти отношение n_i/h:

1-й интервал: $n_1 / h = 2 / 2{,}25 = 0{,}9$;

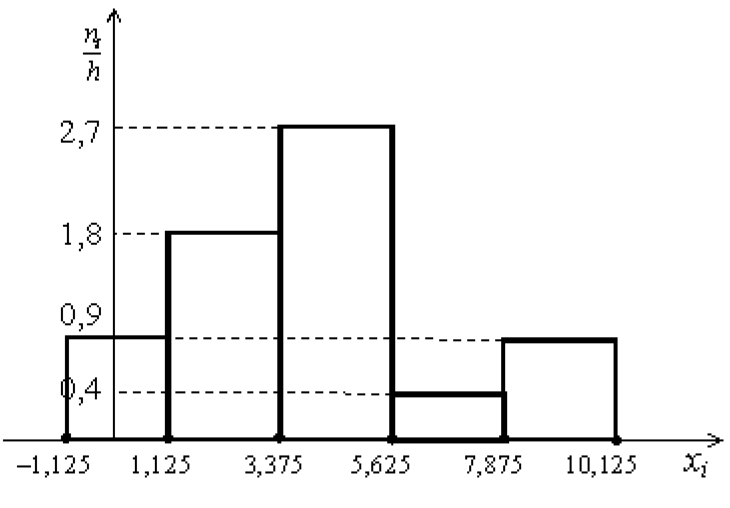
2-й интервал: $n_2 / h = 4 / 2{,}25 = 1{,}8$;

3-й интервал: $n_3 / h = 6 / 2{,}25 = 2{,}7$;

4-й интервал: $n_4 / h = 1 / 2{,}25 = 0{,}4$;

5-й интервал: $n_5 / h = 2 / 2{,}25 = 0{,}9$.

3. Построить гистограмму.



Раздел 7. ГЕОМЕТРИЯ

Тема 7.1. Прямые и плоскости в пространстве

Основные определения и теоремы

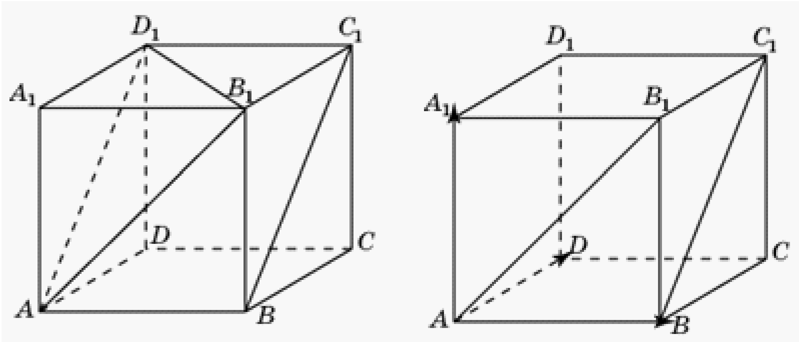
1. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
2. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются скрещивающимися.
3. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.
4. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.
5. Признак параллельности прямой и плоскости: Если прямая, принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.
6. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.
7. Признак параллельности плоскостей: Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
8. Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.
9. Признак перпендикулярности прямой и плоскости: Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.
10. Теорема о трех перпендикулярах: Для того, чтобы прямая лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной.
11. Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым, лежащим в этой плоскости и проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

12. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
13. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.
14. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.
15. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, расположенной в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.
16. Если прямая параллельна плоскости, то она параллельна некоторой прямой на этой плоскости.
17. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.
18. Все точки прямой, параллельной плоскости, одинаково удалены от этой плоскости.

Угол между прямыми

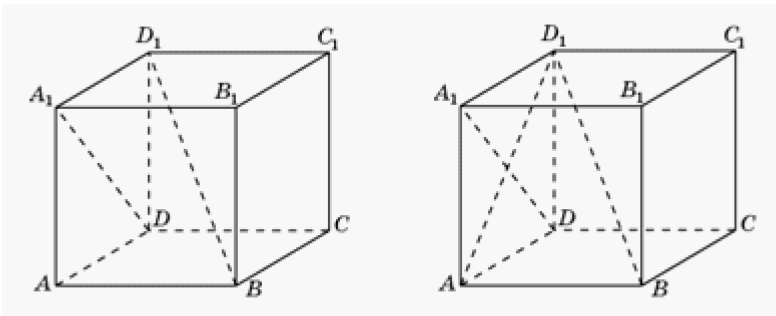
- Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.
- $0° < \angle(a,b) \le 90°.$
- Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.

Пример 1.В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

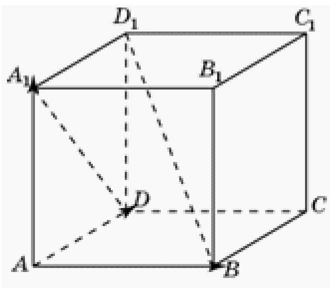
Решение. 

Прямая AD_1 параллельна прямой BC_1 и, следовательно, угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен углу B_1AD_1. Треугольник B_1AD_1 равносторонний и, значит, угол B_1AD_1 равен 60°.

Пример 2.В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямыми DA_1 и BD_1.

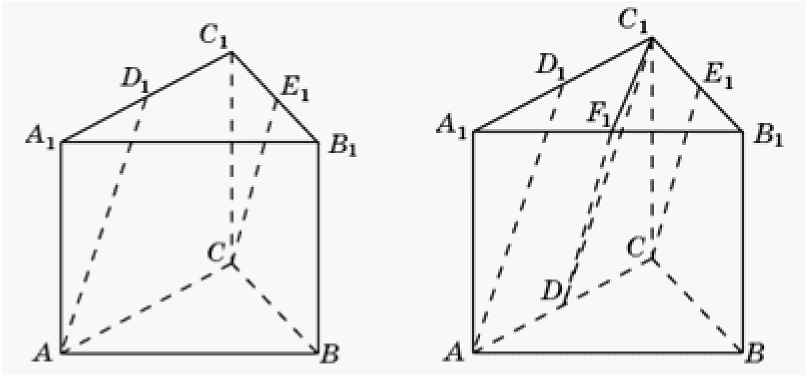
Решение. 

1-й способ. Рассмотрим ортогональную проекцию AD_1 прямой BD_1 на плоскость ADD_1. Прямые AD_1 и DA_1 перпендикулярны. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что прямые DA_1 и BD_1 также перпендикулярны, т.е. искомый угол между прямыми DA_1 и BD_1 равен 90°.2-й способ.



Введем систему координат, считая началом координат точку A, осями координат – прямые AB, AD, AA_1.Вектор $\overrightarrow{DA_1}$ имеет координаты (0, -1, 1). Вектор $\overrightarrow{BD_1}$ имеет координаты (-1, 1, 1). Скалярное произведение этих векторов равно нулю и, значит, искомый угол между прямыми DA_1 и BD_1 равен 90°.

Пример 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1, где D_1 и E_1 – соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1.

Решение. 

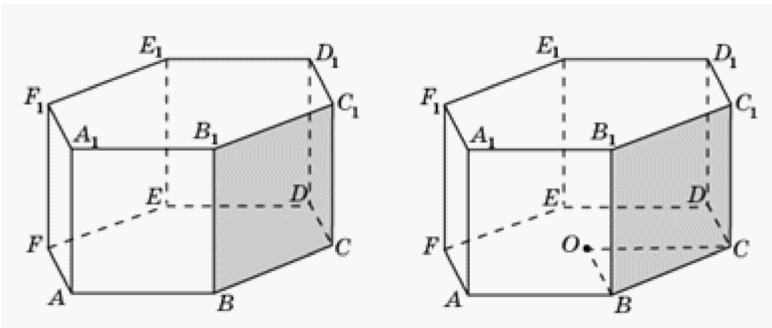
Обозначим D и F_1 соответственно середины ребер AC и A_1B_1.$DC_1 \parallel AD_1$ и $DF_1 \parallel CE_1$, поэтому $\angle(AD1;CE1) = \angle C_1DF_1$. $\triangle C_1DF_1$ равнобедренный, $DC_1 = DF_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $C_1F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Используя теорему косинусов, получаем $\cos\angle C_1DF_1 = 0{,}7$.

Угол между прямой и плоскостью

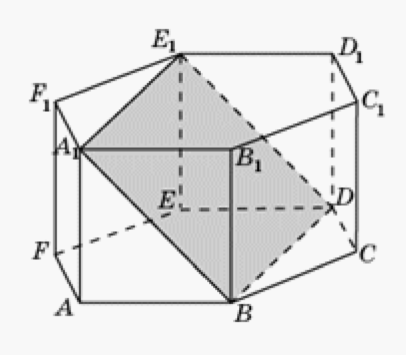
- Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.
- $0° < \angle(a, \alpha) \le 90°$.

Пример 4.В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF и плоскостью BCC_1.

Решение. 

Пусть O — центр нижнего основания призмы. Прямая BO параллельна AF. Так как плоскости ABC и BCC_1 перпендикулярны, то искомым углом будет угол OBC. Так как треугольник OBC равносторонний, то этот угол будет равен $60°$.

Пример 5.В правильной шестиугольной призме $A…F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью BDE_1.

Решение. 

Так как прямые BB_1 и CC_1 параллельны, то искомый угол будет равен углу между прямой BB_1 и плоскостью BDE_1. Прямая BD, через которую проходит плоскость BDE_1, перпендикулярна плоскости ABB_1 и, значит, плоскость BDE_1 перпендикулярна плоскости ABB_1. Следовательно, искомый угол будет равен углу A_1BB_1, т.е. равен $45°$.

Угол между двумя плоскостями

Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру. Величина двугранного угла принадлежит промежутку $(0°;180°)$.Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку $(0°;90°]$.Построение линейного угла двугранного угла, образованного плоскостями α и β: Строим два перпендикуляра $a \in \alpha$ и $b \in \beta$ к прямой пересечения плоскостей; а его величина находится из прямоугольного треугольника или из некоторого треугольника с применением теоремы

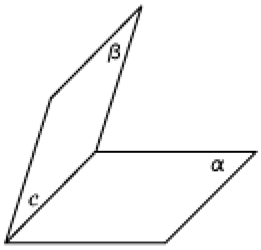


Рис. 1

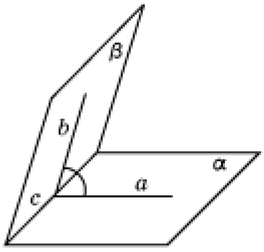
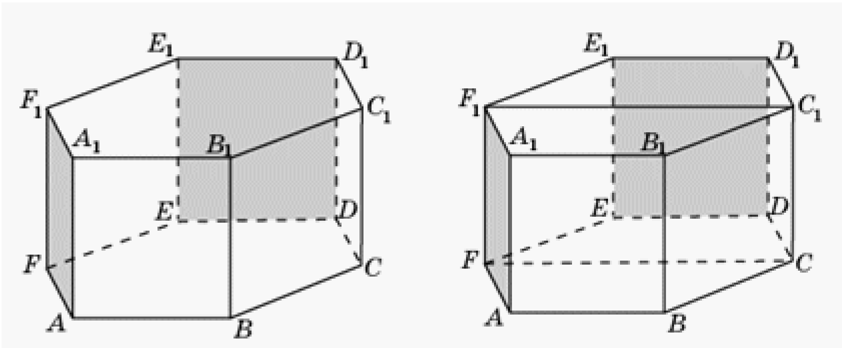


Рис. 2

косинусов:

Пример .В правильной шестиугольной призме A…F_1, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1.

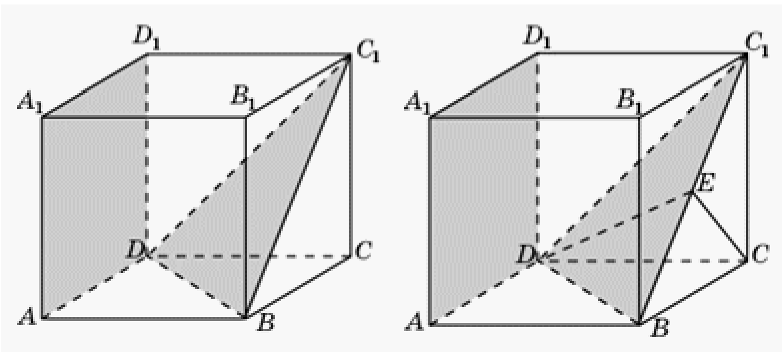
Решение.



Так как плоскость FCC_1параллельна плоскости DEE_1, то искомый угол равен углу между плоскостями AFF_1 и FCC_1. Так как плоскости AFF_1 и FCC_1 перпендикулярны плоскости ABC, то соответствующим линейным углом будет угол AFC, который равен $60°$.

Пример. В единичном кубе A…D_1 найдите тангенс угла между плоскостями ADD_1 и BDC_1.

Решение.



Так как плоскость ADD_1 параллельна плоскости BCC_1, то искомый угол равен углу между плоскостями BCC_1 и BDC_1. Пусть E — середина отрезка BC_1. Тогда прямые CE и DE будут перпендикулярны прямой BC_1 и, следовательно, угол CED будет линейным углом между плоскостями BCC_1 и BDC_1.

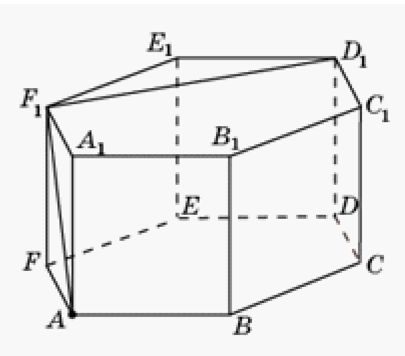
Треугольник CED прямоугольный, катет CD равен 1, катет CE равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, tg$\angle$ CED = $\sqrt{2}$.

Расстояние от точки до прямой

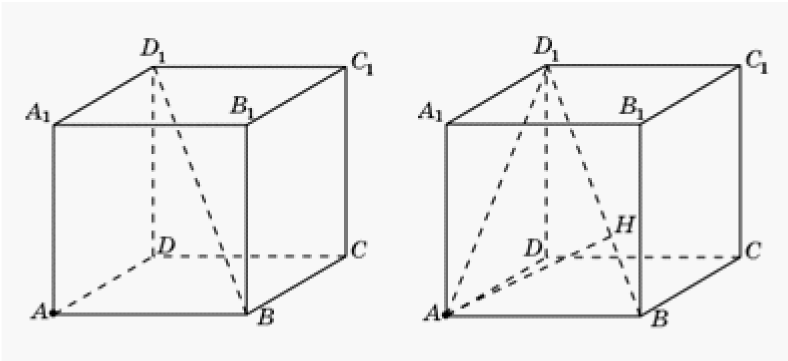
- Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.
- Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.
- Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

Пример. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой D_1F_1.

Решение. 

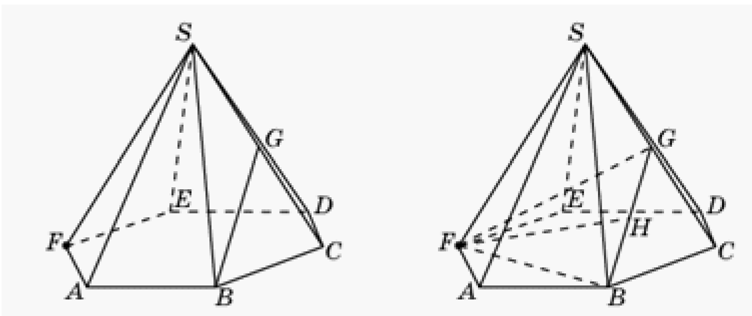
Так как прямая D_1F_1 перпендикулярна плоскости AFF_1, то отрезок AF_1 будет искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую D_1F_1. Его длина равна $\sqrt{2}$.

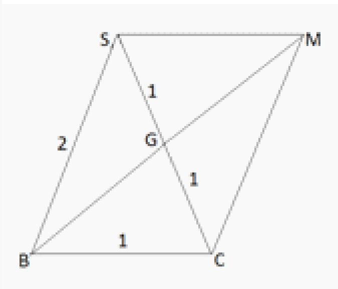
Пример .В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.

Решение. 

Искомым перпендикуляром является высота AH прямоугольного треугольника ABD_1, в котором AB = 1, AD_1 = $\sqrt{2}$, BD_1 = $\sqrt{3}$. Для площади S этого треугольника имеют место равенства $2S = AB \cdot AD_1 = BD_1 \cdot AH$.Откуда находим AH = $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Пример. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2. Найти расстояние от точки F до прямой BG, где G — середина ребра SC.

Решение. 

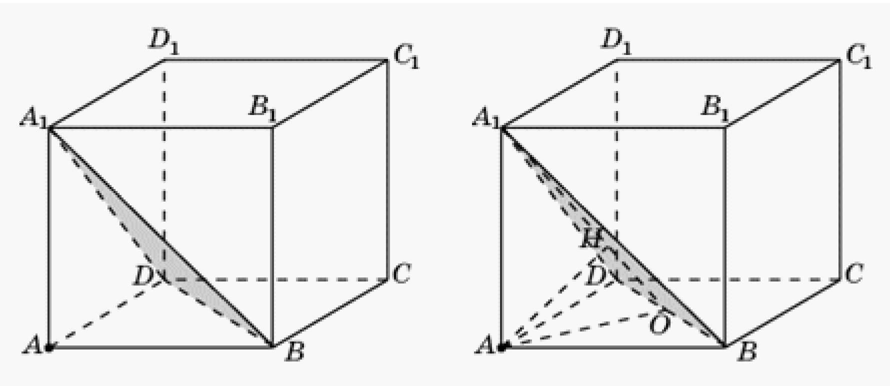


Искомое расстояние от точки F до прямой BG равно высоте FH треугольника FBG, в котором по теореме косинусов в треугольнике AFB и по теореме Пифагора в треугольнике FSG: FB = FG = $\sqrt{3}$. Найдем BG, как половину диагонали параллелограмма, который получим, если достроим треугольник BCG до параллелограмма CBSM, затем воспользуемся формулой: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2$). $BG = \frac{\sqrt{6}}{2}$. По теореме Пифагора в треугольнике BFH находим FH: $FH = \sqrt{FB^2 - BH^2} = \sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{42}}{4}$. Ответ: $\frac{\sqrt{42}}{4}$.

Расстояние от точки до плоскости

- Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.
- Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине их общего перпендикуляра.
- Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.
- Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине их общего перпендикуляра.
- Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.

Пример. В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости

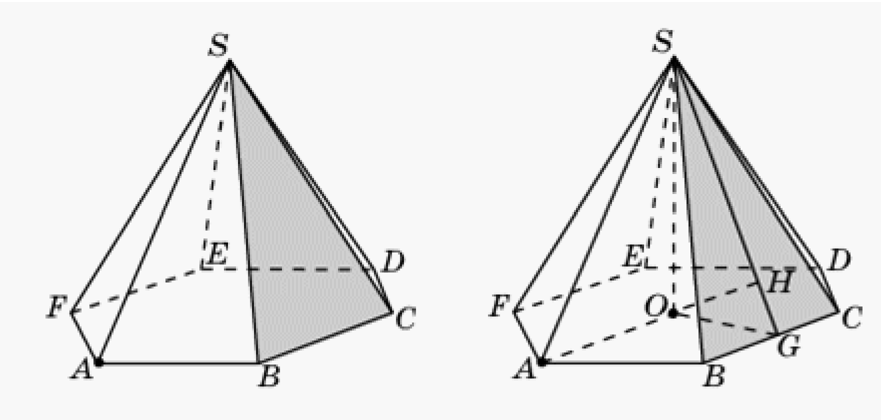


BDA_1.Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Прямая BD перпендикулярна плоскости AOA_1. Следовательно, плоскости BDA_1 и AOA_1 перпендикулярны. Искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDA_1, является высота AH прямоугольного треугольника AOA_1, в котором AA_1 = 1, $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Для площади S этого треугольника имеют место равенства $2S = AO \cdot AA_1 = OA_1 \cdot AH$. Откуда находим AH = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.

Решение.



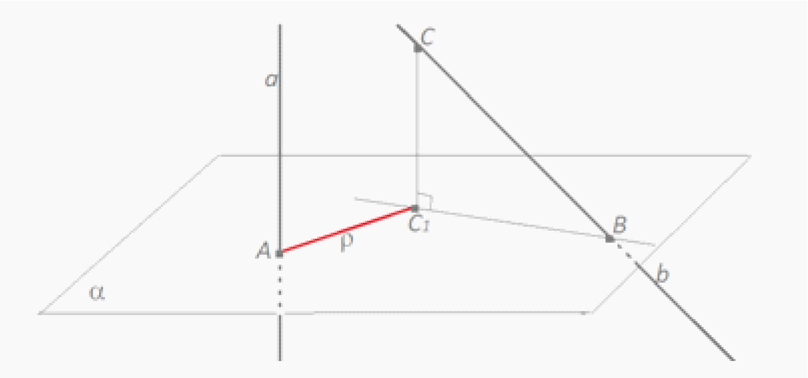
Пусть O — центр основания пирамиды. Прямая AO параллельна прямой BC и, значит, параллельна плоскости SBC. Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки O до плоскости SBC. Пусть G — середина отрезка BC. Тогда прямая OG перпендикулярна BC и искомым перпендикуляром, опущенным из точки O на плоскость SBC, является высота OH прямоугольного треугольника SOG. В этом треугольнике $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $SG = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $SO = \sqrt{3}$. Для площади S этого треугольника имеют место равенства $2S = OG \cdot SO = SG \cdot OH$. Откуда находим OH = $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

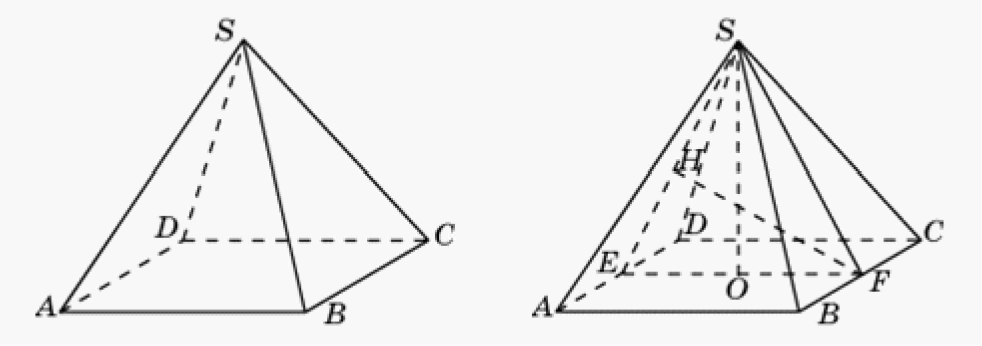
Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра. Способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми:

1. Найти длину общего перпендикуляра к этим прямым, если его можно построить

2. Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.
3. Заключить данные прямые в параллельные плоскости, проходящие через данные скрещивающиеся прямые, и найти расстояние между этими плоскостями.
4. Построить плоскость, перпендикулярную одной из данных прямых, и построить на этой плоскости ортогональную проекцию второй прямой:



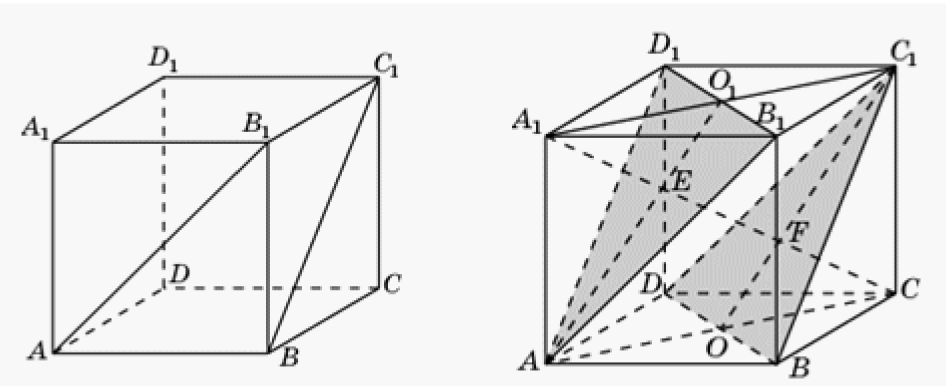
Пример. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC.

Решение. 

Прямая BC параллельна плоскости SAD, в которой лежит прямая SA. Следовательно, расстояние между прямыми SA и BC равно расстоянию от прямой BC до плоскости SAD.Пусть E и F соответственно середины ребер AD и BC. Тогда искомым перпендикуляром будет высота FH треугольника SEF. В треугольнике

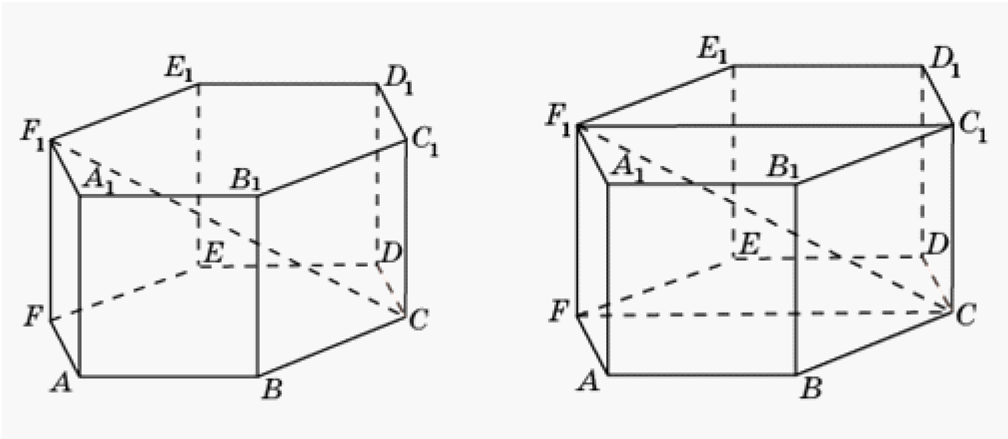
SEF имеем: EF = 1, SE = SF = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, высота SO равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Для площади S треугольника SEF имеют место равенства $2S = EF \cdot SO = SE \cdot FH$, из которых получаем $FH = \frac{EF \cdot SO}{SE} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Пример. В единичном кубе A…D_1 найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение. 

Плоскости AB_1D_1 и BDC_1, в которых лежат данные прямые, параллельны. Следовательно, расстояние между этими прямыми равно расстоянию между соответствующими плоскостями. Диагональ CA_1 куба перпендикулярна этим плоскостям. Обозначим E и F точки пересечения диагонали CA_1 соответственно с плоскостями AB_1D_1 и BDC_1. Длина отрезка EF будет равна расстоянию между прямыми AB_1 и BC_1. Пусть O и O_1 соответственно центры граней ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ куба. В треугольнике ACE отрезок OF параллелен AE и проходит через середину AC. Следовательно, OF — средняя линия треугольника ACE и, значит, EF = FC. Аналогично доказывается, что O_1E — средняя линия треугольника A_1C_1F и, значит, A_1E = EF. Таким образом, $_1$ составляет одну треть диагонали CA_1, т.е. EF = $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример. В правильной шестиугольной призме A…F_1, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и CF_1.



Решение.

Расстояние между прямыми AA_1 и CF_1 равно расстоянию между параллельными плоскостями ABB_1 и CFF_1, в которых лежат эти прямые. Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тема 7.2. Многогранники

Призмой называют многогранник, у которого две одинаковые взаимно параллельные грани - основания, а остальные грани - параллелограммы.

Пирамида представляет собой многогранник, у которого одна грань (произвольный многоугольник) принимается за основание, а остальные (боковые) грани - треугольники с общей вершиной.

Правильными называются такие многогранники, у которых все грани - правильные равные многоугольники. Так как в каждой вершине многогранника должны сходиться не меньше трех многоугольников, а у правильного многоугольника все углы равны, то величина угла многоугольника (грани) должна быть меньше 2p/3.

В правильном шестиугольнике углы равны 2p/3, поэтому в правильном многограннике грань не может быть шестиугольником.

Из сказанного можно сделать вывод, что правильных многогранников может быт только пять. В качестве граней правильных многогранников могут быть только правильный треугольник, четырехугольник и пятиугольник. Правильными многогранниками являются:

· правильный четырехгранник или **тетраэдр** (грань - правильный треугольник);

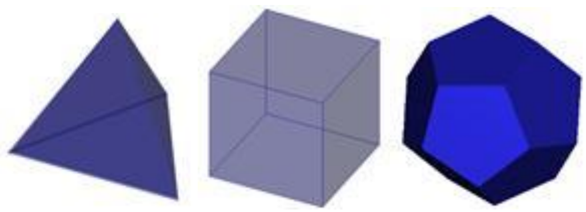
· правильный шестигранник (куб) или **гексаэдр** (грань квадрат);

· правильный восьмигранник или **октаэдр** (грань правильный треугольник);

· правильный двенадцатигранник или **додекаэдр** (грань - правильный пятиугольник);

· правильный двенадцатигранник или **икосаэдр**(грань - правильный треугольник).

Правильные многогранники называют Платоновы тела.



Тема 7.3.Тела и поверхности вращения

Стереометрия. Многогранники

		Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
Призма	Произвольная призма		$S_{бок} = P_{\perp} d$	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$	$V = S_{осн} h$ $V = S_{\perp} d$
	Прямая призма		$S_{бок} = P_{осн} h$	$S_{полн} = P_{осн} h + 2S_{осн}$	$V = S_{осн} h$
	Правильная треугольная призма	$S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S_{бок} = 3ah$	$S_{полн} = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} h$
	Правильная четырехугольная призма *(прямоугольный параллелепипед)*	$S_{осн} = a^2$	$S_{бок} = 4ah$	$S_{полн} = 4ah + 2a^2$	$V = a^2 h$
	Правильная шестиугольная призма	$S_{осн} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$S_{бок} = 6ah$	$S_{полн} = 6ah + 3a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} h$
Пирамида	Произвольная пирамида			$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} h$
	Правильная треугольная пирамида	$S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S_{бок} = \frac{3al}{2}$	$S_{полн} = \frac{3al}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} h$
	Правильная четырехугольная пирамида	$S_{осн} = a^2$	$S_{бок} = 2al$	$S_{полн} = 2al + a^2$	$V = \frac{1}{3} a^2 h$
	Правильная шестиугольная пирамида	$S_{осн} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$S_{бок} = 3al$	$S_{полн} = 3al + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} h$

<u>Обозначения:</u> a – сторона основания, h – высота многогранника, l – апофема (высота боковой грани пирамиды), $P_{\perp}$ – периметр перпендикулярного сечения призмы, d – длина бокового ребра призмы, $S_{\perp}$ – площадь перпендикулярного сечения призмы

Стереометрия. Тела вращения

		Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
Цилиндр		$S_{осн} = \pi r^2$	$S_{бок} = 2\pi rh$	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$ $S_{полн} = 2\pi rh + 2\pi r^2$	$V = S_{осн} h$ $V = \pi r^2 h$
Конус	Конус	$S_{осн} = \pi r^2$	$S_{бок} = \pi rl$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ $S_{полн} = \pi rl + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} h$ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
	Усеченный конус	$S_{осн1} = \pi r^2$ $S_{осн2} = \pi R^2$	$S_{бок} = \pi (r + R) l$	$S_{полн} = \pi r^2 + \pi R^2 +$ $+ \pi (r + R) l$	$V = \frac{1}{3} \pi (r^2 + rR + R^2) h$
Шар				$S_{пов} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

<u>Обозначения:</u> r, R – радиусы оснований, h – высота, l – образующая

Тема 7.4. Измерения в геометрии

«Нахождение основных элементов цилиндра, конуса и шара».

Пример. Дан цилиндр. Площади сечения, проведенного параллельно оси цилиндра равна 16см^2 , высота цилиндра равна 4см, а радиус основания 2 см. Найти расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

Дано:

ABA_1B_2-цилиндр.

$S_{скдр}$=16см^2

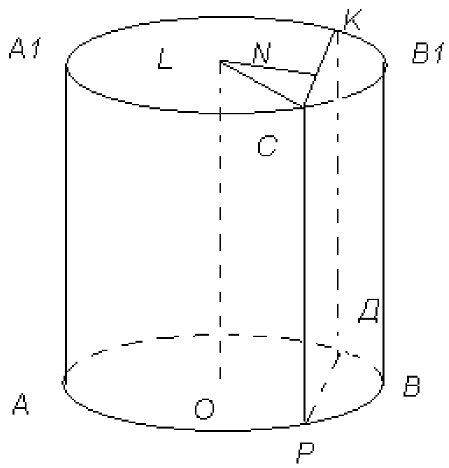
OL=4см

CL=8см

Найти:

NL

Решение:



т. к OL=CP=4см; Sскор=CK·CP

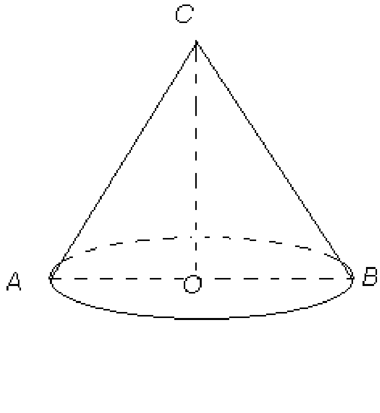
$$CK = \frac{S_{СКДР}}{CP};$$

$$CK = \frac{16}{4} = 4см$$

т. к NO_1-сечение делит сторону СК пополам, то CN=2см.

$$LC^2 = LN^2 + CN^2$$
$$LN^2 = LC^2 - CN^2$$
$$LN^2 = 8^2 - 2^2 = 64 - 4 = 60$$
$$LN = \sqrt{60} \approx 7{,}7$$
$$Ответ: 7{,}7$$

Пример. Образующие равностороннего конуса равна 6см. Определить высоту.



Дано:

САВ- равносторонний конус.

АС=6 см

Найти:

CO=?

Решение:

1.Т.к САВ-равностороний конус, то в нем АС=АВ=СВ=4см

$AO = \frac{1}{2}AB$ (высота СО делит АВ пополам)

$AO = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3см$

2. По теореме Пифагора найдем СО

$AC^2 = AO^2 + CO^2$
$CO^2 = AC^2 - AO^2$
$CO^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
$CO = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
$Ответ: 3\sqrt{3}см$

Пример. Осевое сечение цилиндра - квадрат, площадь которого 16см^2.Найти площадь основания.

Дано:

АВСД-цилиндр

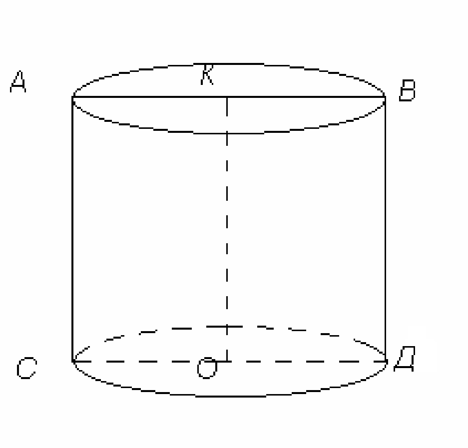
АВСД-квадрат

$S_{АВСД}$=16см^2.

Найти:

$S_{осн.}$=?

Решение:



$S_{АВСД} = СД^2$
. $СД = \sqrt{S_{АВСД}}$
$СД = \sqrt{16} = 4см$

2. $CO = \frac{1}{2}СД$

$CO = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2см$, CO=R

3. $S_{осн.}=\pi R^2$

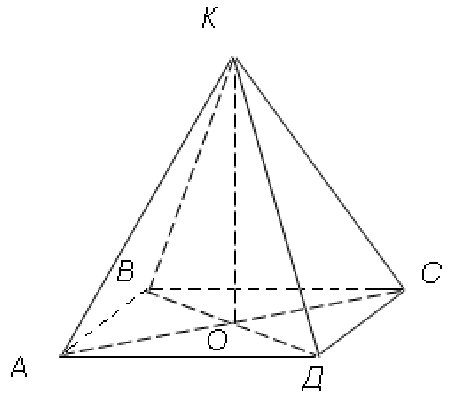
$S_{осн.}=3,14 \cdot 2^2=3,14 \cdot 4=12,56$см^2

Ответ: 12,56 см^2

«Вычисление объёмов геометрических тел».

Пример. В правильной четырёхугольной пирамиде площадь основания равна $64 см^2$, а боковое ребро 10см.

Определите объем пирамиды.



Дано:

ABCD-правильная четырёхугольная пирамида.

$S_{АВСД}=64см^2$

КД=10см

Найти:

КО=?

Решение:

В основании лежит квадрат, а площадь квадрата вычисляется по формуле $S_{кв}=a^2$:

$$a^2 = S_{кв}$$
$$a^2 = 64$$
$$a = \sqrt{64} = 8см$$

2) По теореме Пифагора найдем АС из ΔАДС:

$АС^2=АД^2+СД^2$

$АС^2=8^2+8^2=64+64=128$

$$AC = \sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$$

3) $ОД = 4\sqrt{2}$ (т.к диагонали делятся и точка пересечения делится пополам),поэтому

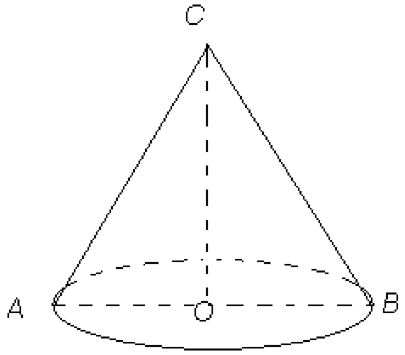
$$ОД = \frac{1}{2} АД = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

4) По теореме Пифагора найдем КО из ΔКОД:

$$КО^2 = КД^2 - ОД^2$$
$$КО^2 = 10^2 - (4\sqrt{2})^2$$
$$КО = \sqrt{100-32} = \sqrt{68} = \sqrt{17 \cdot 4}$$
$$КО = 2\sqrt{17}$$
$$Ответ: 2\sqrt{17}$$

Пример 3.

Найти объем тела полученный от вращения прямоугольного треугольника с катетами 3см и 4см вокруг большего из катетов.



Дано:

BO=4см

OC=3см

Найти:

V=?

Решение:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

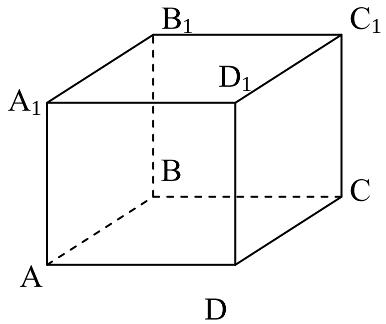
$$V = \frac{1}{3}\cdot 3^2 \cdot 4\pi = 12\pi \approx 37{,}7$$

Ответ. 37,5 см ^{3}

«Вычисление площадей поверхностей геометрических тел»

Пример.

Вычислить поверхность правильной четырёхугольной призмы с стороной основания 10 см и высотой 20 см.



Дано:
AD=10 см

H=20 см

$S_{полн}$-?

Решение:

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

$$S_{бок} = P_{ок}\cdot H$$

$$P_{осн} = 4\cdot AD$$

$$S_{бок} = 40\cdot 20 = 800(см^2)$$

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

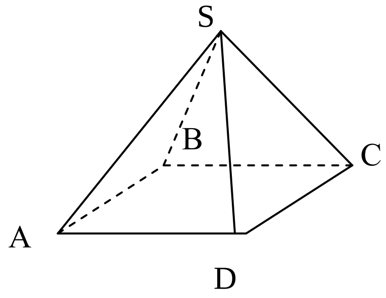
$$S_{осн} = AD^2 = 100см^2$$

$$S_{полн} = 800 + 200 = 1000см^2$$

Ответ:1000 см^2

Пример. По стороне основания **8** , высоте **25** и апофеме **26** определить полную поверхность правильной четырехугольной пирамиды.

Решение:



Дано:
AD=8 см
H=12 см

$S_{полн}$-?

1) $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot H_{бок}$

$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 26 = 416 см^2$

$S_{полн} = 416 + 64 = 480 см^2$

$S_{осн} = AD^2 = 64 см^2$

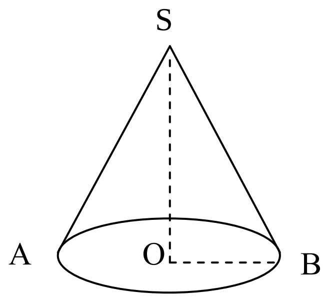
Ответ:480 см^2

Пример. Высота конуса h=10, образующая L=12, а радиус основания R=5см.Найти полную поверхность

Дано:
R=5 см
h=10 см
L=12 см

$S_{полн}$-?

Решение:



$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

$S_{бок} = \pi RL$

$S_{бок} = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 12 = 188{,}4$

$S_{осн} = \pi R^2$

$S_{осн} = 3{,}14 \cdot 5^2 = 3{,}14 \cdot 25 = 78{,}5$

$S_{полн} = 188{,}4 + 78{,}5 = 266{,}9 см^2$

Ответ:266,9см^2

Тема 7.5. Координаты и векторы

Определение 1. Величина, полностью характеризуемая своим числовым значением в выбранной системе единиц, называется *скалярной* или ***скаляром***.

(Масса тела, объем, время и т.д.)

Определение 2. Величина, характеризуемая числовым значением и направлением, называется *векторной* или ***вектором***.

(Перемещение, сила, скорость и т.д.)

Обозначения: $\bar{a}$, $\bar{b}$ или $A\dot{B}$, $B\dot{C}$.

Геометрический вектор – это направленный отрезок.

Для вектора $\overrightarrow{AB}$ – точка A – начало, точка B – конец вектора.

Определение 3. ***Модуль*** вектора – это длина отрезка АВ.

Определение 4. Вектор, модуль которого равен нулю, называется ***нулевым,*** обозначается $\bar{0}$.

Определение 5. Векторы, расположенные на параллельных прямых или на одной прямой называются ***коллинеарными***. Если два коллинеарных вектора имеют одинаковое направление, то они называются ***сонаправленными***.

Определение 6. Два вектора считаются ***равными***, если они ***сонаправлены*** и равны по модулю.

<u>Действия над векторами.</u>

1) Сложение векторов.

Опр. 6. ***Суммой*** двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, исходящая из общей точки их приложения **(правило параллелограмма)**.

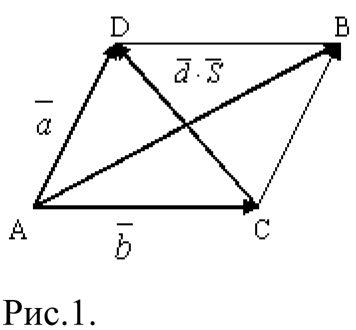


Рис.1.

Опр. 7. Суммой трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется диагональ параллелепипеда, построенного на этих векторах **(правило параллелепипеда).**

Опр. 8. Если A, B, C – произвольные точки, то $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ **(правило треугольника)**.

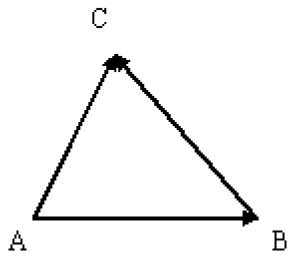


рис.2

Свойства сложения.

1°. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (переместительный закон).

2°. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = (\bar{a} + \bar{c}) + \bar{b}$ (сочетательный закон).

3°. $\bar{a} + (-\bar{a}) + \bar{0}$.

2) Вычитание векторов.

Опр. 9. Под ***разностью*** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимают вектор $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{d} = \bar{a}$.

В параллелограмме – это другая диагональ СД (см.рис.1).

3) Умножение вектора на число.

Опр. 10. ***Произведением*** вектора $\bar{a}$ на скаляр $\boldsymbol{k}$ называется вектор

$\bar{b} = \boldsymbol{k}\bar{a} = \bar{a}\boldsymbol{k}$**,**

имеющий длину ***ka*,** и направление, которого:

1. совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $k > 0$;
2. противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $k < 0$;
3. произвольно, если $k = 0$.

Свойства умножения вектора на число.

1°. $(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l})\bar{a} = \boldsymbol{k}\bar{a} + \boldsymbol{l}\bar{a}$.

$\boldsymbol{k}(\bar{a} + \bar{b}) = \boldsymbol{k}\bar{a} + \boldsymbol{k}\bar{b}$.

2°. $\boldsymbol{k(l\bar{a}) = (kl)\bar{a}}$.

3°. $\boldsymbol{1 \times \bar{a} = \bar{a},\ (-1) \times \bar{a} = -\bar{a},\ 0 \times \bar{a} = \bar{0}}$.

<u>Свойства векторов.</u>

Опр. 11. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***коллинеарными***, если они расположены на <u>параллельных прямых</u> или на <u>одной прямой.</u>

Нулевой вектор $\bar{0}$ коллинеарен любому вектору.

Теорема 1. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ***коллинеарны,*** Û когда они пропорциональны т.е.

$\bar{b} = \boldsymbol{k}\bar{a}$, $\boldsymbol{k}$ – скаляр.

Опр. 12. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называются ***компланарными***, если они параллельны некоторой плоскости или лежат в ней.

Теорема 2. Три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ***компланарны,*** Û когда один из них является линейной комбинацией двух других, т.е.

$\bar{c} = \boldsymbol{k}\bar{a} + \boldsymbol{l}\bar{b}$, $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ – скаляры.

<u>Проекция вектора на ось.</u>

Теорема 3. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось (направленная прямая) l равна произведению длины вектора $\bar{a}$ на косинус угла между направлением вектора и направлением оси, т.е. $пр_l \bar{a} = a \times \cos a,\ a =$ Ð$(\bar{a}, l)$.

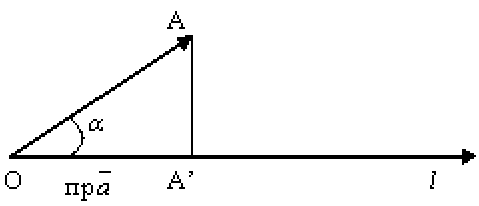


рис.3.

Опр. 13. Проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz называются ***координатами вектора.*** Обозначение: $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$.

Длина вектора: $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Пример: Вычислить длину вектора $\bar{a}\,(1,2,-3)$.

Решение: $|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}.$

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Пример: Найти расстояние между точками M (2,3,-1) и K (4,5,2).

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (5-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}.$$

Действия над векторами в координатной форме.

Даны векторы $\bar{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$.

1. $(\bar{a} \pm \bar{b})=\{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$.

2. $l\bar{a}=\{la_x, la_y, la_z\}$, где l – скаляр.

Скалярное произведение векторов.

Определение: Под скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е. $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha$, α - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\bar{a}\times\bar{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2. $(\bar{a}+\bar{b})\,\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}$

3. $|\bar{a}|^2 = \bar{a}\cdot\bar{a}$

4. $k\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot k\bar{b} = k\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})$

5. $(k\bar{a}+m\bar{b})\cdot\bar{c} = k(\bar{a}\cdot\bar{c}) + m(\bar{b}\cdot\bar{c})$, где k, m – скаляры.

6. два вектора перпендикулярны (ортогональны), если $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

7. $\bar{a}\upuparrows\bar{b}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}\cdot\bar{b} = \pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Скалярное произведение в координатной форме имеет вид: $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$,

где $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$.

Пример 1.

Дано:

$\overline{a}(2;3)$

$\overline{b}(-3;4)$

Найти:

$\overline{\upsilon} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$

Решение:

Найдем $2\overline{a}$:

$2\overline{a} = (2 \cdot 2; 2 \cdot 3) = (4;6)$

Найдем $3\overline{b}$:

$3\overline{b} = (3 \cdot (-3); 3 \cdot 4) = (-9;12)$

Найдем $\overline{\upsilon} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$:

$\overline{\upsilon} = 2\overline{a} - 3\overline{b} = (4+9; 6-12) = (13;-6)$

Ответ: (13;-6)

Пример 2.

Дано:

A(1;2)

B(1;-4)

Найти:

$\left|\overline{AB}\right| = ?$

Решение:

Для решения применим формулу $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$:

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(1-1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$

Ответ:6

Пример 3.

C(2;6)

A(4;-5)

B(-1;2)

Найти: $\overline{A}\overline{B}\cdot\overline{A}\overline{C}$

Решение:

1.Найдем $\overline{A}\overline{B}$:

$\overline{A}\overline{B}=(-1-4;2+5)=(-5;7)$ (из координаты конца надо отнять координаты начала)

2.Найдем $\overline{A}\overline{C}$

$\overline{A}\overline{C}=(2+1;6-2)=(3;4)$

3.Найдем $\overline{A}\overline{B}\cdot\overline{A}\overline{C}$ по формуле $\overline{a}\cdot\overline{в}=x_1x_2+y_1y_2$:

$\overline{A}\overline{B}\cdot\overline{A}\overline{C}=3\cdot(-5)+7\cdot 4=-15+28=13$

Ответ: 13.

Пример 4.

$\overline{a}=(1;3)$

$\overline{в}=(-3;1)$

Найти: $\overline{a}\cdot\overline{в}$

cosφ=?

Решение:

Найдем $\overline{a}\cdot\overline{в}$ по формуле $\overline{a}\cdot\overline{в}=x_1x_2+y_1y_2$:

$\overline{a}\cdot\overline{в}=1\cdot(-3)+3\cdot 1=-3+3=0$

Найдем cosφ по формулам $cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{в}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{в}|};\cos\varphi\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$:

$$\cos\varphi=\frac{0}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2}}=\frac{0}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{0}{10}=0$$

$\cos\varphi=0$

$\varphi=\frac{\pi}{2}$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Пример 5.

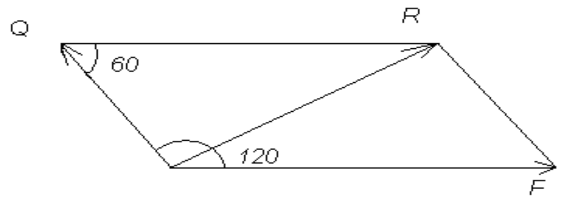
Дано:

$|F| = 3$

$|Q| = 2$

Найти:

R=?



Решение:

Решим по формуле

$c^2 = a^2 + в^2 - 2ав\cos\alpha$ (теорема косинусов)

$R^2 = F^2 + Q^2 - 2FQ\cos\alpha$

$R^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ = 9 + 4 - 12\cdot\frac{1}{2} = 13 - 6 = 7;$

$R = \sqrt{7} \approx 2{,}5$

Ответ: 2,5