

Министерство образования и науки Российской Федерации
Муромский институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего
образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ
РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»**

для студентов специальности

38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»
код и наименование направления подготовки

Программа подготовки специалистов среднего звена

Составитель:
Мокаяева Т.В.

Муром, 2018

Раздел I. Основы линейной алгебры

1. Матрицы. Основные определения

Матрицей называется система $m \cdot n$ чисел, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов. Числа этой таблицы называются элементами матрицы. Обозначения матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ составляют i -ю строку ($i = 1, 2, \dots, m$), элементы $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}$ – k -й столбец ($k = 1, 2, \dots, n$), a_{ik} – элемент, принадлежащий i -й строке и k -му столбцу матрицы, т.е. находится на пересечении i -строки и k -го столбца. Числа i, k называют индексами элемента. Матрицу, имеющую m строк и n столбцов, называют матрицей размеров $m \times n$ (читается m на n).

Матрица $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, состоящая лишь из одной строки, называется строчной матрицей, или матрицей-строкой..

Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, имеющая лишь один столбец, называется матрицей-столбцом.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей. Обозначим нулевую матрицу буквой O , тогда по определению

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), то есть матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Главной называется диагональ, идущая из левого верхнего в правый нижний угол квадратной матрицы, она состоит из элементов с повторяющимися индексами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Побочной называется диагональ, идущая из левого нижнего в правый верхний угол, она состоит из элементов $a_{n1}, a_{n-12}, \dots, a_{1n}$.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю, то есть

$$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Обозначим единичную матрицу буквой E , тогда

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Треугольной называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Две матрицы A и B называются равными $A=B$, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны: $a_{ik} = b_{ik}, i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$.

2. Действия над матрицами

Линейными действиями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание матриц определяются только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц A и B называется такая матрица C , что $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$, то есть матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц слагаемых. Верно $A+B=B+A$.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A = (a)_{mn}$ на число α (или числа α на матрицу A) называется матрица $B = (b)_{mn}$, для которой $b_{ik} = \alpha \cdot a_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$, то есть матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число α . Произведение матрицы A на число α обозначается $A\alpha$.

Вычитание производится как совокупность операций сложения матриц и умножение на число, т.е. $A - B = A + (-1) \cdot B$.

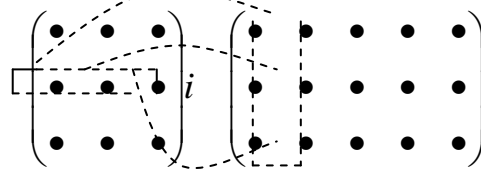
Умножение матриц. Это действие определяется для согласованных матриц. Матрица A называется согласованной с матрицей B , если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Произведением матрицы $A = (a)_{mn}$ на матрицу $B = (b)_{nl}$ называется такая матрица $C_{ml} = (c)_{ml}$, для которой

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk},$$

то есть элемент c_{ik} матрицы C равен сумме произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы k -го столбца матрицы B . Матрица C имеет m строк (как и матрица A) и l столбцов (как и матрица B). Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB , $AB \neq BA$, в частности $AE = EA = A$.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:



Пример 2. Даны две матрицы второго порядка ^k

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения AB и BA .

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 4 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспонирование матрицы. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называют матрицей, транспонированной относительно данной. Матрицу, транспонированную относительно матрицы $A = (a_{ik})$, обозначим через $A' = (a_{ki})$ или A^T . Таким образом, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{то } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Определители

Определителем квадратной матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется число $\det A = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, (1)

равное разности парных произведений элементов, стоящих на главной диагонали и на побочной.

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ называется число}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \quad (2)$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части формулы представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Этому произведению приписывается соответствующий знак. Чтобы запомнить, какие произведения следует брать со знаком плюс, какие со знаком минус, полезно правило, схематически изображенное на рис 1 (правило треугольников):

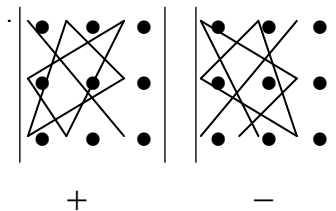


Рис.1.

Минором какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит данный элемент. Минор элемента a_{ik} обозначим M_{ik} . Например, минором элемента a_{21}

определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – элемент a_{12} (определитель первого порядка), минором элемента a_{21} определителя (2) является

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ – определитель второго порядка.}$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$. Например, алгебраическим дополнением элемента a_{21} определителя (2) является определитель M_{21} , взятый со знаком минус. Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} будем обозначать A_{ik} . В соответствии с определением

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \quad (3)$$

Основная теорема об определителях: определитель равен сумме парных произведений элементов некоторой строки(столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (4)$$

Равенство(4) называется разложением определителя n-го порядка по элементам k -ого столбца или i-ой строки, соответственно. С его помощью нахождение определителя сводится к нахождению ряда миноров, порядка на единицу меньше, чем исходный определитель – процедура в целом громоздкая. Однако ее можно упростить, воспользовавшись свойством определителя: величина определителя не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на константу. Это преобразование позволяет сформировать строку определителя, в которой все элементы равны нулю, кроме одного, разложение по (4) будет содержать только одно слагаемое.

Пример 3. Вычислить определитель $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Во второй строке уже имеется один нуль, поэтому займемся именно этой строкой. Для этого работаем со столбцами. Последний и первый столбцы оставим без изменений, ко второму столбцу прибавим четвертый, умноженный на 2, к третьему – четвертый, умноженный на -2. Получим

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

По (4) получим $\Delta_4 = 1 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. Получившийся определитель третьего

порядка можно уже вычислить непосредственно, но можно образовать нули во второй строке. Для этого к третьему столбцу прибавим первый.

$$\text{Получим } \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

4. Обратная матрица

Матрицей, обратной квадратной матрице A называется квадратная матрица A^{-1} , удовлетворяющая равенствам

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad (5)$$

где E – единичная матрица. Из определения следует, что обратная матрица может существовать только для квадратной матрицы и обе матрицы имеют один и тот же порядок.

Теорема 1 . Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1} , определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где A_{ik} алгебраическое дополнение элемента a_{ik} .

Пример 4. Найти матрицу A^{-1} , обратную матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A и алгебраические дополнения ее элементов:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = 2, \quad A_{31} = 1, \quad A_{32} = 1, \quad A_{33} = 2.$$

В соответствии с формулой (6) получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Ранг матрицы

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Ранг матрицы будем обозначать буквой r . Если все миноры матрицы равны нулю, ранг ее считается равным нулю.

Итак, ранг матрицы может быть найден следующим образом. Если все миноры первого порядка (элементы матрицы) равны нулю, то $r=0$. Если хотя бы один из миноров первого порядка отличен от нуля, а все миноры второго порядка равны нулю, то $r=1$. В случае, когда имеется минор второго порядка, отличный от нуля, исследуют миноры третьего порядка. Так поступают до тех пор, пока не обнаружится одно из двух: либо все миноры порядка k равны нулю, либо миноры порядка k не существуют, тогда $r=k-1$. Поскольку определитель, имеющий нулевую строку (столбец) равен нулю, то вычеркивание нулевой строки (столбца) не влияет на величину ранга матрицы. Метод образования нулей, применяемый при подсчете определителей, значительно упрощает процесс вычисления ранга матрицы.

Пример 5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Среди миноров первого порядка этой матрицы есть отличный от нуля, поэтому $r > 0$. Из элементов данной матрицы можно составить миноры второго и третьего порядка, но все они равны нулю. Следовательно, $r=1$.

К этому же результату придем, вычеркнув второй и четвертый нулевые столбцы, первый умножим на -2 и сложим с последним, полученный нулевой столбец также вычеркнем. Преобразованная матрица-столбец с ненулевыми элементами имеет ранг, равный единице.

Минор матрицы, отличный от нуля, порядка, равного рангу матрицы, называется **базисным** минором этой матрицы. Строки и столбцы матрицы, участвующие в образовании базисного минора, называются базисными.

Методы решения систем из n уравнений с n неизвестными

Если число уравнений системы (7) равно числу неизвестных, то главная матрица A , составленная из коэффициентов при неизвестных, квадратная. Рассмотрим методы решения таких систем.

1. Матричный метод.

Представим систему (7) в матричном виде $AX=B$, где X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов. Решение X найдем, умножив столбец B слева на матрицу A^{-1} , обратную матрице A :

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример 4.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 5z = 15 \\ 6x - 8y + 7z = 9 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix} = -49 \neq 0.$$

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 33;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 7 - 5 \cdot 6) = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-8) + 1 \cdot 6 = -26;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = -((-2) \cdot 7 + 3 \cdot 8) = -10;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 3 \cdot 6 = -11;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-8) + 2 \cdot 6) = -4;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 1 = -7;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 5 - 3 \cdot 4) = 7;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 7.$$

Составляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{-1}{49} \begin{pmatrix} 33 & -10 & -7 \\ 2 & -11 & 7 \\ -26 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

т.к. $X = A^{-1} \cdot B$, то

$$X = \frac{1}{-49} \cdot \begin{pmatrix} 33 & -10 & -7 \\ 2 & -11 & 7 \\ -26 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-49} \cdot \begin{pmatrix} 33 \cdot 2 + (-10) \cdot 15 + (-7) \cdot 9 \\ 2 \cdot 2 + (-11) \cdot 15 + 7 \cdot 9 \\ -26 \cdot 2 - 4 \cdot 15 + 7 \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-49} \begin{pmatrix} -147 \\ -98 \\ -49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1.$$

2. Метод Крамера

Теорема 2 (Крамера). Если главный определитель системы (7) Δ отличен от нуля, то система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (8)$$

где Δ и Δ_k ($k=1, 2, \dots, n$) определены формулами

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad - \text{побочный определитель, получаемый из}$$

главного заменой k -го столбца столбцом свободных членов.

Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если она: 1) определена в точке x_0 ; 2) имеет конечный предел при $x \rightarrow x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция называется непрерывной, если:

$$1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \quad \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Функция называется непрерывной на некотором промежутке X , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Пример 1: Доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$

Решение:

$$\begin{aligned} \Delta f &= (3(x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) + 1) - (3x_0^2 - 2x_0 + 1) = 3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 - 3x_0^2 + 2x_0 - 1 = \\ &= 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x) = 0$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Классификация точек разрыва:

$$1) x_0 - \text{точка устранимого разрыва, если а) } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$$

б) в точке x_0 функция не определена

$$2) x_0 - \text{точка разрыва I рода, если } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

$$h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) - \text{скачок функции}$$

3) x_0 - точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует

Пример 2:

Найти точки разрыва функции и установить их тип

$$a) y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x < 1 \\ 0, x = 1 \\ x + 1, x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2$$

$$f(1) = 0$$

$\Rightarrow x_0 = 1$ точка устранимого разрыва

$$б) y = f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 1 \\ x - 2, x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1+0} (x - 2) = -1$$

$\Rightarrow x_0 = 1$ точка разрыва I рода

$$h = -1 - 1 = -2$$

$$в) y = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\infty} = \infty$$

$\Rightarrow x_0 = 1$ точка разрыва II рода

Содержание практической работы

Задание 1. Доказать, что функция является непрерывной

$$a) f(x) = x + 9$$

$$б) f(x) = x^3 + 8$$

$$в) f(x) = 2x^2 + 6x - 5$$

$$г) f(x) = 10x^2 - 12x$$

Задание 2. Найти точки разрыва и установить их тип

$$a) y = f(x) = \begin{cases} -e^{-x}, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ e^x, x > 0 \end{cases}$$

$$б) y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$в) y = f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$$

$$г) y = f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

Раздел II. Основы математического анализа

1. Вычисление производных функций. Применение производной к построению графиков функций. Вычисление дифференциалов первого и высших порядков

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

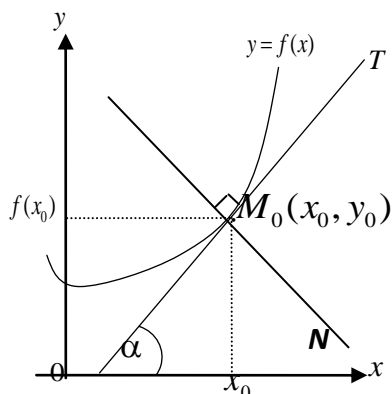
Обозначения производной в точке x_0 :

$$f'(x_0), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left. y'_x \right|_{x_0}, \quad y'(x_0) \text{ и другие.}$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется дифференцированием.

Геометрический смысл производной.



Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

(2)

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

(3)

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x), \quad V = V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	VI	Производная сложной функции $y = f[u(x)], \quad y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	VII	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$	VIII	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad (y'_x \neq 0).$
V	$\left(\frac{c}{v} \right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}, \quad (v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	$c=\text{const},$ $u = u(x)$ — дифференцируемая функция	х	—	независимая	переменная,
1	$C' = 0$				
2	$x' = 1$				
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$				
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$				
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$				
6	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0)$				
7	$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$				
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$				
9	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$				
10	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$				
11	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$				
12	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad u < 1$				
13	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad u < 1$				
14	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$				
15	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$				

Производной n -го порядка называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\frac{d^3 y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3}$; б) $s = (e^t - 2 \ln t) \sin t$; в) $u = \operatorname{ctg}^3 \frac{v}{3}$; г) $z = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2}$.

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$

$$= 3 \cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t , т. е. $t'=1$, получим: □

$$s = [(e^t - 2 \ln t) \sin t]' = (e^t - 2 \ln t)' \sin t + (e^t - 2 \ln t)(\sin t)' =$$

$$((e^t)' - 2(\ln t)') \sin t + (e^t - 2 \ln t) \cos t = \left(e^t - \frac{2}{t} \right) \sin t + (e^t - 2 \ln t) \cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v , т. е. $v'=1$; □ используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)^2 \right]' = 2 \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)' = 2 \left(\operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left(-\frac{\left(\frac{v}{3} \right)'}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) =$$

$$= 2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) = -\frac{2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3}}{3 \sin^2 \frac{v}{3}} = -\frac{2 \cos \frac{v}{3}}{3 \sin^3 \frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что $t=1$, получим: \square

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2} \right)' = \frac{(\operatorname{arctg} 2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg} 2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg} 2t(0+4 \cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t \operatorname{arctg} 2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x^2 - 3}$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

$$1) y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2 - 3} = 1;$$

$$2) y'(x) = ((x^2 - 3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}}(x^2 - 3)' = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}};$$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 3}} = 2.$$

Подставим x_0 , $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1 + 2(x - 2)$,

или $2x - y - 3 = 0$ — уравнение касательной.

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x - 2), \text{ или } x + 2y - 4 = 0 \text{ — уравнение нормали.}$$

Пример 3. Найти производную y'_x , если функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln(5 - 2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5 - 2t). \end{cases}$$

Используем правило VII $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$\begin{cases} x'_t = \frac{(5 - 2t)'}{5 - 2t} = \frac{-2}{5 - 2t} \\ y'_t = \frac{(5 - 2t)'}{1 + (5 - 2t)^2} = \frac{-2}{1 + (5 - 2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1 + (5 - 2t)^2} : \frac{-2}{5 - 2t} = \frac{5 - 2t}{1 + (5 - 2t)^2} = \frac{5 - 2t}{4t^2 - 20t + 26}.$$

Пример 4. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x + \cos 2x$; б) $u = 3 + e^{-x}$; в) $s = \ln 3t$.

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx$, т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

а) $dy = (x + \cos 2x)'dx = (1 - \sin 2x \cdot 2)dx = (1 - 2 \sin 2x)dx.$

б) $du = (3 + e^{-x})'dx = e^{-x}(-1)dx = -e^{-x}dx.$

в) $ds = (\ln 3t)'dt = \frac{(3t)'}{3t}dt = \frac{3}{3t}dt = \frac{1}{t}dt.$

Пример 5. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x$.

Решение. $y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2 \ln x + 1))' = x'(2 \ln x + 1) + x(2 \ln x + 1)' = 2 \ln x + 1 + x \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Пример 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 3}{x^2 + 6}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x^2 + 5x - 14};$$

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо x предельное значение ∞ , определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 + 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(4 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = \infty \cdot 4 = \infty, \text{ т. к. } \frac{2}{x^2} \rightarrow 0, \frac{3}{x^3} \rightarrow 0.$$

$$\text{Аналогично: } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 6) = \infty.$$

Имеем неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 3}{x^2 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^3 + 2x - 3)'}{(x^2 + 6)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 + 2}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(12x^2 + 2)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 12x = \infty.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x^2 + 5x - 14} &= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2(-7)^2 + 15(-7) + 7}{(-7)^2 + 5(-7) - 14} = \left(\frac{0}{0}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(2x^2 + 15x + 7)'}{(x^2 + 5x - 14)'} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{4x + 15}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{4(-7) + 15}{2(-7) + 5} = \frac{-13}{-9} = \frac{13}{9}. \end{aligned}$$

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

$$1) \text{ а) } y = 3x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}; \quad \text{б) } s = (1 + t^2)(2 - 3\text{arctgt}); \quad \text{в) } u = \ln^3 \frac{V}{2}; \quad \text{г) } z = \frac{5 - \sin 3t}{e^{4t}}.$$

$$2) \quad \text{а) } y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}; \quad \text{б) } s = (4 - 3\ln t)(5 + 2\sin t); \quad \text{в) } u = \sin^4(2V + 3); \quad \text{г) } z = \frac{\sin(2 - t)}{2 - \ln 3t}. \quad 3)$$

$$\text{а) } y = 7x^2 + \frac{4}{x^6} - \sqrt[5]{x^2}; \quad \text{б) } s = (3 - \cos t)(5 + 6\sin t); \quad \text{в) } u = \sqrt[3]{1 - 4V^2}; \quad \text{г) } z = \frac{t^3 - e^{3t}}{\arcsin 2t}.$$

$$4) \text{ а) } y = 5x^2 + \frac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7}; \quad \text{б) } s = (3t^3 - 4)(t - 2\cos t); \quad \text{в) } u = \ln^2(5V - 3); \quad \text{г) } z = \frac{\ln(4 - 5t)}{\sin t}.$$

$$5) \text{ а) } y = x^5 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}; \quad \text{б) } s = t^4(4 + \text{arctgt}); \quad \text{в) } u = \cos^3(3V + 1); \quad \text{г) } z = \frac{t - \arcsin 5t}{e^{-t}}.$$

$$6) \text{ а) } y = x^4 + \frac{1}{x} - 2\sqrt[3]{x}; \quad \text{б) } s = (3 + \text{tgt})(1 - 4\text{tgt}); \quad \text{в) } u = \text{tg}^4(3V + 2); \quad \text{г) } z = \frac{\text{arctg} 2t}{1 + 4t^2}.$$

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

$$1) \frac{x^2 - 3}{x}, \quad x_0 = 1.$$

$$2) \sqrt{5-x^2}, x_0 = 2.$$

$$3) \frac{x^2+3x}{3}, x_0 = -1.$$

$$4) \sqrt{x}+2x, x_0 = 9.$$

$$5) \frac{x^2}{x-2}, x_0 = 1.$$

$$6) \sqrt{1+3x}, x_0 = 1.$$

Задание 3. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$1) \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = \cos(2t+6) \\ y = \sin(2t+6) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x = ctgt \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$$

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

$$1) y = \sin 2x + 5;$$

$$2) y = \ln x - x^3;$$

$$3) y = 4 + 8 \sin x;$$

$$4) y = 2x - 1.$$

$$5) y = 1 - \cos x;$$

$$6) y = 10 - 3x^2$$

Задание 5. Найти производную второго порядка функции $y=f(x)$.

$$1) y = \ln x + 9$$

$$2) y = \cos x - \ln x$$

$$3) y = \sin x + x^4$$

$$4) y = x^2 + \sin x$$

$$5) y = x + \ln x$$

$$6) y = 3e^x + 2x$$

Задание 6. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием

$$1) y = (\sin x)^{\cos x}$$

$$2) y = (\cos x)^x$$

$$3) y = x^{\ln x}$$

$$4) y = (\sin x)^{\ln x}$$

$$5) y = x^{\cos x}$$

$$6) y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$$

Задание 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{x^2 - 5x + 4};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-5x} - 1}{\operatorname{arctg} x}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 - \cos x}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - 5x + 1}{1 - 3x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{\sin x} - 1}{\sin 3x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

2. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклость графика функции, точки перегиба.

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она на этом отрезке достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Если свое наибольшее значение M функция $f(x)$ принимает в точке $x_0 \in [a; b]$, то $M = f(x_0)$ будет локальным максимумом функции $f(x)$, так как в этом случае существует окрестность точки x_0 , такая, что $f(x) \leq f(x_0)$.

Однако свое наибольшее значение M функция $f(x)$ может принимать и на концах отрезка $[a; b]$. Поэтому, чтобы найти наибольшее значение M непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, надо найти все максимумы функции на интервале $(a; b)$ и значения $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$, то есть $f(a)$ и $f(b)$, и выбрать среди них наибольшее. Вместо исследования на максимум можно ограничиться нахождением значений функции в критических точках.

Наименьшим значением m непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ будет наименьший минимум среди всех минимумов функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ и значений $f(a)$ и $f(b)$.

Задание. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4$ на отрезке $[0; 5]$.

Решение. Находим производную функции:

$$y'(x) = (4x^3 - 2x^2 + 4)' = 12x^2 - 4x$$

Находим точки, в которых производная равна нулю:

$$y'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}$$

Из полученных значений нам надо оставить лишь те, которые принадлежат заданному промежутку $[0; 5]$. Оба значения лежат в этом промежутке.

Находим значения функции в полученных стационарных точках из промежутка и на концах промежутка:

$$y(0) = 4; \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{106}{27} \approx 3,92; \quad y(5) = 454$$

Таким образом,

$$y_{\min} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{106}{27}; \quad y_{\max} = y(5) = 454$$

$$\text{Ответ.} \quad y_{\min} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{106}{27}; \quad y_{\max} = y(5) = 454$$

График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, является на этом интервале выпуклым, если график этой функции в пределах интервала $(a; b)$ лежит не выше любой своей касательной (рис. 1).

График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, является на этом интервале вогнутым, если график этой функции в пределах интервала $(a; b)$ лежит не ниже любой своей касательной (рис. 2).

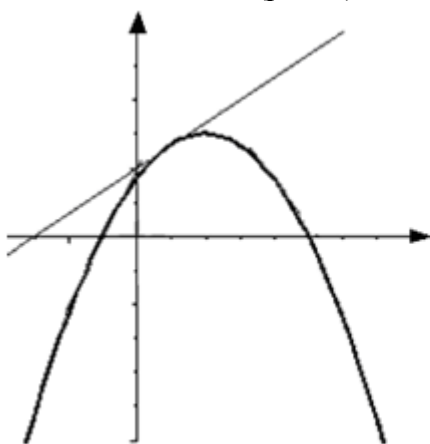


рис 1

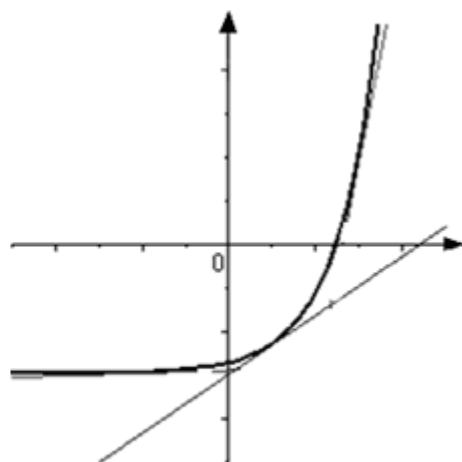


рис 2

Теоремы о выпуклости функции и точках перегиба

(Об условиях выпуклости или вогнутости графика функции)

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и имеет непрерывную, не равную нулю в точке $x_0 \in (a; b)$ вторую производную. Тогда, если $f''(x) > 0$ всюду на интервале $(a; b)$, то функция имеет вогнутость на этом интервале, если $f''(x) < 0$, то функция имеет выпуклость.

Определение

Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка $M(x_1; f(x_1))$, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.

Теорема

(О необходимом условии существования точки перегиба)

Если функция $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_1; f(x_1))$, то $f''(x_1) = 0$ или не существует.

Теорема

(О достаточном условии существования точки перегиба)

Если:

первая производная $f'(x)$ непрерывна в окрестности точки x_1 ;

вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует в точке x_1 ;

$f''(x)$ при переходе через точку x_1 меняет свой знак,

тогда в точке $M(x_1; f(x_1))$ функция $y = f(x)$ имеет перегиб.

Схема исследования функции на выпуклость, вогнутость

Найти вторую производную функции.

Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
Исследовать знак производной слева и справа от каждой найденной точки и сделать вывод об интервалах выпуклости и точках перегиба.

Пример

Задание. Найти интервалы выпуклости/вогнутости функции $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1$

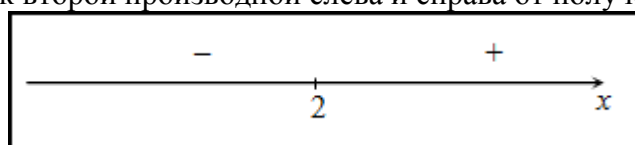
Решение. Найдем вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1 \right)'' = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 3 \right)' = x - 2$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю, для этого решаем уравнение $y''(x) = 0$:

$$y''(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Исследуем знак второй производной слева и справа от полученной точки:



Так как на промежутке $(-\infty; 2)$ вторая производная $y''(x) < 0$, то на этом промежутке функция $y(x)$ выпукла; в силу того, что на промежутке $(2; +\infty)$ вторая производная $y''(x) > 0$, функция вогнута. Так как при переходе через точку $x = 2$ вторая производная сменила знак, то эта точка является точкой перегиба графика функции.

Ответ. Точка $x = 2$ — точка перегиба графика функции.

На промежутке $(-\infty; 2)$ функция выпукла, на промежутке $(2; +\infty)$ функция вогнута.

3. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл. Вычисление площадей с помощью интегралов.

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a, b) , называется первообразной для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a, b) , если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x) dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$, C — const.

Операция нахождения первообразной для данной функции называется интегрированием. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x); \quad d \int f(x) dx = f(x) dx;$$

2. $\int dF(x) = F(x) + C;$
3. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \quad k — \text{const};$
4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du = C; \quad C = \text{const};$
2. $\int du = u + C;$
3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$
- 3a. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
6. $\int e^u du = e^u + C;$
7. $\int \cos u du = \sin u + C;$
8. $\int \sin u du = -\cos u + C;$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$
12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$
13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$
14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$
15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$
16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$
17. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C;$
18. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$a) \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \right) dx; \quad б) \int \left(\frac{5}{11x^2+2} + 3 \cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x} \right) dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
a) \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \right) dx &= \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + 2x^{5/6} \right) dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы} \\ \text{функций на сумму интегралов, при этом постоянные} \\ \text{множители вынесем за знак интегралов} \end{array} \right\} = \\
&= 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}} - 3 \int \frac{dx}{x} - \int x^{-4} dx + 2 \int x^{5/6} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем табличные} \\ \text{интегралы 12, 4, 3} \end{array} \right\} = \\
&= 5 \ln |x + \sqrt{x^2+7}| - 3 \ln |x| - \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 2 \cdot \frac{x^{5/6+1}}{5/6+1} + C = \\
&= 5 \ln |x + \sqrt{x^2+7}| - 3 \ln |x| + \frac{1}{3x^3} + \frac{12}{11} x^{11/6} + C.
\end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}
&\left(5 \ln |x + \sqrt{x^2+7}| - 3 \ln |x| + \frac{1}{3x^3} + \frac{12}{11} x^{11/6} + C \right)' = 5 \left(\ln |x + \sqrt{x^2+7}| \right)' - \\
&- 3 (\ln |x|)' + \frac{1}{3} (x^{-3})' + \frac{12}{11} (x^{11/6})' + C' = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулы} \\ \text{4, 3, 1 таблицы производных} \end{array} \right\} = \\
&= 5 \cdot \frac{(x + \sqrt{x^2+7})'}{x + \sqrt{x^2+7}} - 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} (-3) x^{-3-1} + \frac{12}{11} \cdot \frac{11}{6} \cdot x^{11/6-1} = 5 \cdot \frac{1 + \frac{(x^2+7)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x + \sqrt{x^2+7}} - \\
&- \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + 2x^{5/6} = 5 \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x + \sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} = 5 \frac{\sqrt{x^2+7} + x}{(x + \sqrt{x^2+7})\sqrt{x^2+7}} - \\
&- \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} = \frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \text{ — верно.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \int \left(\frac{5}{11x^2+2} + 3 \cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x} \right) dx &= 5 \int \frac{dx}{11 \left(x^2 + \frac{2}{11} \right)} + 3 \int 5^x dx + \\
&+ \int \frac{(4-x)(4+x)}{4+x} dx = \frac{5}{11} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{11}} \right)^2} + 3 \int 5^x dx + 4 \int dx - \int x dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулы} \\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов} \end{array} \right\} = \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}} + 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + \\
&+ 4x - \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{5}{\sqrt{22}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{11}{2}} x + 3 \frac{5^x}{\ln 5} + 4x - \frac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{5}{\sqrt{22}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{11}{2}} x + 3 \frac{5^x}{\ln 5} + 4x - \frac{1}{2} x^2 + C \right)' = \frac{5}{\sqrt{22}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{11}{2}} x \right)' + \\
&+ \frac{3}{\ln 5} (5^x)' + 4x' - \frac{1}{2} (x^2)' + C' = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1} \\ \text{таблицы производных} \end{array} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{\sqrt{22}} \frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'}{1 + \frac{11}{2}x^2} + \frac{3}{\ln 5} \cdot 5^x \ln 5 + 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} 2x^{2-1} = \frac{5}{\sqrt{22}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}} + \\
&+ 3 \cdot 5^x + 4 - x = \frac{5}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{2}} \frac{\sqrt{11} \cdot 2}{\sqrt{2}(2+11x^2)} + 3 \cdot 5^x + \frac{(4-x)(4+x)}{4+x} = \\
&= \frac{5}{2+11x^2} + 3 \cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x} \text{ — верно.}
\end{aligned}$$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x = \varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C$, то $\int f(x)dx = F(\psi(x)) + C$, где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

- 1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.
- 2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.
- 3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.
- 4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$a) \int \cos 4x dx; \quad б) \int e^{9x+1} dx; \quad в) \int x(2-x^2)^5 dx$$

Решение:

$$\begin{aligned}
a) \int \cos 4x dx &= \left| \begin{array}{l} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
б) \int e^{9x+1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \frac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9} \int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{9} e^t + C = \frac{1}{9} e^{9x+1} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \int x(2-x^2)^5 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 2 - x^2 \\ dt = (2 - x^2)' = -2x dx \\ x dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5 \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12} (2 - x^2)^6 + C.
 \end{aligned}$$

Интегрирование по частям.

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int U dV = UV - \int V dU, \quad (3)$$

называемая формулой интегрирования по частям.

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV .

Таблица 1

Вид интеграла	$U \rightarrow dU$	$dV \rightarrow V$
$\int P_n(x) \sin kx dx$ $\int P_n(x) \cos kx dx$ $\int P_n(x) e^{kx} dx$ $n = 1, 2, \dots$	$U = P_n(x) \rightarrow$ $\rightarrow dU = P_n'(x) dx$	$dV = \sin kx dx \rightarrow V = -\frac{1}{k} \cos kx$ $dV = \cos kx dx \rightarrow V = \frac{1}{k} \sin kx$ $dV = e^{kx} dx \rightarrow V = \frac{1}{k} e^{kx}$
$\int \ln kx P_n(x) dx$ $\int \arcsin kx P_n(x) dx$ $\int \arccos kx P_n(x) dx$ $\int \operatorname{arctg} kx P_n(x) dx$ $\int \operatorname{arcctg} kx P_n(x) dx$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$U = \ln kx \rightarrow dU = \frac{dx}{x}$ $U = \arcsin kx \rightarrow dU = \frac{k dx}{\sqrt{1 - k^2 x^2}}$ $U = \arccos kx \rightarrow dU = -\frac{k dx}{\sqrt{1 - k^2 x^2}}$ $U = \operatorname{arctg} kx \rightarrow dU = \frac{k dx}{1 + k^2 x^2}$ $U = \operatorname{arcctg} kx \rightarrow dU = -\frac{k dx}{1 + k^2 x^2}$	$dV = P_n(x) dx \rightarrow$ $\rightarrow V = \int P_n(x) dx$

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n , т. е. $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

a) $\int (3x-1)\sin 2x dx$; б) $\int (1+2x)\ln x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int (3x-1)\sin 2x dx &= \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \rightarrow dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \rightarrow V = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \\ &= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \int (1+2x)\ln x dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \rightarrow dU = \frac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \rightarrow V = \int (1+2x)dx = x+x^2 \end{array} \right| = \ln x(x+x^2) - \int (x+x^2) \frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x(x+x^2) - \int (1+x)dx = \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (5)$$

где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Формула (5) называется формулой Ньютона — Лейбница.

Свойства определенного интеграла:

$$1) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx; \quad 2) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

$$4) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$5) \int_a^b Cf(x) dx = C \int_a^b f(x) dx, \quad C - \text{const};$$

$$6) \text{ Если } f(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in [a, b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

7) Если $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (6)$$

где $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$, $t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU, \quad (7)$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 (x^2 - 16x + 3) dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_1^3 (x^2 - 16x + 3) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - 16 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 = \\ &= \left(\frac{3^3}{3} - 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 8 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) = \left(\frac{27}{3} - 72 + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} - 8 + 3 \right) = \\ &= (9 - 63) - \left(\frac{1}{3} - 5 \right) = -54 - \frac{1}{3} + 5 = -49 - \frac{1}{3} = -49 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить интегралы.

- 1) $\int \left(\frac{7}{x^2 + 16} - \frac{x^4 + 5}{x^5} + 3\sqrt{x} \right) dx$ $\int \left(\frac{5}{5x^2 + 5} + 7^x - \frac{\sin 2x}{\cos x} \right) dx$
- 2) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{3 + x^2}} - \frac{2x^2 + 10}{x} + 4\sqrt[6]{x^5} \right) dx$ $\int \left(\frac{2}{2x^2 + 2} + 2^x - \frac{x^2 - 4}{x + 2} \right) dx$
- 3) $\int \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + 3}} + 4e^x \right) dx$ $\int \left(\frac{12}{3 + 3x^2} - 3\cos x + \frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) dx$
- 4) $\int \left(\frac{8}{\sqrt{5 + x^2}} + \frac{6 + x^3}{x^4} - 3\sqrt[8]{x^5} \right) dx$ $\int \left(\frac{6}{2x^2 + 2} - 2\sin x + 3^x \right) dx$
- 5) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{4x^2 - 1}{x^3} - 2\sqrt[8]{x^3} \right) dx$ $\int \left(\frac{6}{3x^2 - 9} + \frac{3\sin^3 x - 5}{\sin^2 x} \right) dx$

$$6) \int \left(\frac{3\cos^3 x - 2}{\cos^2 x} - 5\sqrt{x^3} \right) dx \qquad \int \left(\frac{16}{2x^2 - 8} - \frac{3 - x^3}{x^4} + 5^x \right) dx$$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

$$\begin{aligned} 1) & \int \frac{dx}{\sin^2 3x} & \int \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}} & \int e^{1-3x} dx \\ 2) & \int (2x-1)\cos(x^2-x) dx & \int x\sqrt{5+x^2} dx & \int e^{6x+5} dx \\ 3) & \int 10^{2x+1} dx & \int \sin \frac{x}{2} dx & \int \frac{dx}{5x+3} \\ 4) & \int x^2(3-x^3)^{10} dx & \int \cos 2x dx & \int e^{\sin x} \cos x dx \\ 5) & \int \frac{dx}{x \ln x} & \int \sin 2x dx & \int 3^{7x-1} dx \\ 6) & \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} & \int \sin(2-3x) dx & \int \frac{dx}{e^{3x}} \end{aligned}$$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

$$\begin{aligned} 1) & \int (7x-1)\cos x dx & \int \operatorname{arctg} x dx \\ 2) & \int (6-5x)e^x dx & \int (7x+5)\ln x dx \\ 3) & \int x\cos x dx & \int \operatorname{arcctg} x dx \\ 4) & \int (1+2x)\cos x dx & \int \arcsin x dx \\ 5) & \int (8x-1)\sin 5x dx & \int (6+5x)\ln x dx \\ 6) & \int xe^x dx & \int (3x+2)\ln x dx \end{aligned}$$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

$$\begin{aligned} 1) & \int_1^2 (x^3 + 10x) dx \\ 2) & \int_{-2}^3 (3x^2 + 6x - 2) dx \\ 3) & \int_1^3 (x^2 - 16x + 3) dx \\ 4) & \int_0^8 (21x - 19) dx \\ 5) & \int_{-4}^0 (x^3 + 8) dx \\ 6) & \int_{10}^{13} (2x + 7) dx \end{aligned}$$

4. Двойной интеграл. Переход к повторным интегралам. Изменение порядка интегрирования.

Теоретические сведения

Понятие двойного интеграла

Двойной интеграл в общем виде записывается следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

\iint – значок двойного интеграла; D – область интегрирования (плоская фигура);

$f(x, y)$ – подынтегральная функция двух переменных, часто она довольно простая;

dx, dy – значки дифференциалов.

Что значит вычислить двойной интеграл?

Вычислить двойной интеграл – это значит найти ЧИСЛО. Самое обычное число:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = C, \text{ где } C = \text{const}$$

Результат (число C) может быть отрицательным.

Для того чтобы вычислить двойной интеграл, его необходимо свести к так называемым повторным интегралам. Сделать это можно двумя способами. Наиболее распространён следующий способ:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{?}^{?} dx \int_{??}^{??} f(x, y) dy$$

Вместо знаков вопроса необходимо расставить пределы интегрирования. Причём одиночные знаки вопроса $?$ у внешнего интеграла – это числа, а двойные знаки вопроса $??$ у внутреннего интеграла – это функции одной переменной $y = f(x)$, зависящие от «икс».

Откуда взять пределы интегрирования. Они зависят от того, какая в условии задачи дана область D . Область D представляет собой обычную плоскую фигуру, с которой вы неоднократно сталкивались, например, при вычислении площади плоской фигуры или вычислении объема тела вращения.

После того, как переход к повторным интегралам осуществлён, следуют

непосредственно вычисления: сначала берётся внутренний интеграл $\int_{??}^{??} f(x, y) dy$, а потом – внешний. Друг за другом. Отсюда и название – повторные интегралы.

Задача сводится к вычислению двух определённых интегралов.

Второй способ перехода к повторным интегралам встречается несколько реже:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\dot{?}}^{\dot{?}} dy \int_{\ddot{?}}^{\ddot{?}} f(x, y) dx$$

Поменялся порядок интегрирования: теперь внутренний интеграл берётся по «икс», а внешний – по «игрек». Пределы интегрирования, обозначенные звёздочками – будут другими! Одиночные звёздочки внешнего интеграла – это числа, а двойные звёздочки внутреннего интеграла – это обратные функции $x = g(y)$, зависящие от «игрек».

Какой бы мы ни выбрали способ перехода к повторным интегралам, окончательный ответ обязательно получится один и тот же:

$$\int_{?}^{?} dx \int_{??}^{??} f(x, y) dy = \int_{\dot{?}}^{\dot{?}} dy \int_{\ddot{?}}^{\ddot{?}} f(x, y) dx = C$$

Переход к повторным интегралам и расстановка пределов интегрирования.

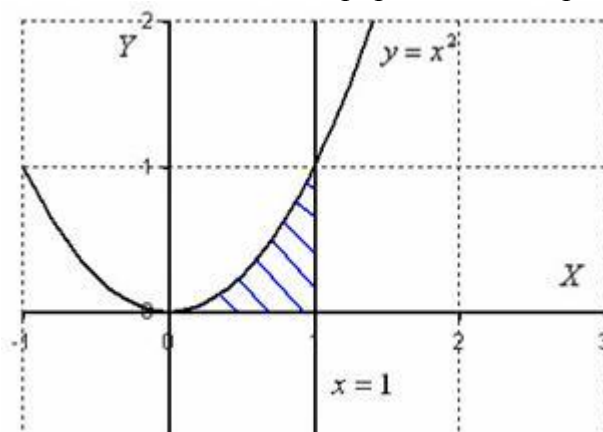
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\text{?}}^{\text{?}} dx \int_{\text{?}}^{\text{??}} f(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\text{?}}^{\text{??}} dy \int_{\text{?}}^{\text{?}} f(x, y) dx$$

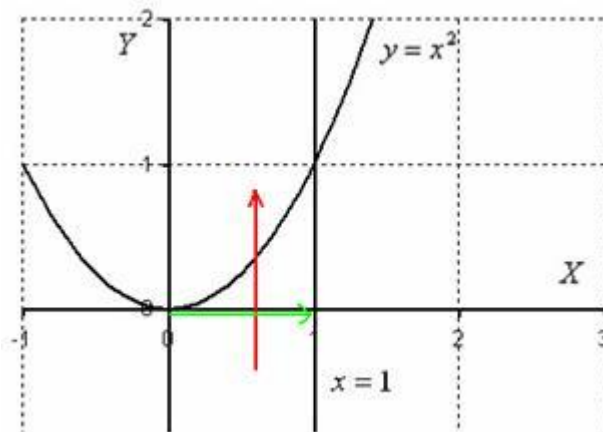
Рассмотрим конкретный пример:

Дан двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ с областью интегрирования $D: x=1; y=x^2; y=0$. Перейти к повторным интегралам и расставить пределы интегрирования двумя способами.

Решение: Область интегрирования на чертеже:



Сканируем лучом лазера каждую точку заштрихованной области:



Луч лазера проходит область интегрирования **строго снизу вверх**. Луч входит в область через ось абсцисс, которая задаётся уравнением $y=0$ и выходит из области через параболу $y=x^2$ (красная стрелка). Чтобы просветить всю область, вам нужно **строго слева направо** провести указкой вдоль оси OX от 0 до 1 (зелёная стрелка).

Итак, что получилось: «игрек» изменяется от 0 до x^2 ; «икс» изменяется от 0 до 1.

В задачах вышесказанное записывают в виде неравенств:

$$0 \leq y \leq x^2$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Данные неравенства называют **порядком обхода области интегрирования** или просто **порядком интегрирования**

Перейдем от двойного интеграла к повторным интегралам:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$$

Перейдем к повторным интегралам вторым способом. Для этого следует найти обратные функции. Смотрим на функции, которыми задается область $D: x=1; y=x^2; y=0$. Если совсем просто, то перейти к обратным функциям, это значит – выразить «иксы» через «игреки». Единственной функцией, где есть и «икс» и «игрек», является $y=x^2$.

Если $y=x^2$, то $x=\pm\sqrt{y}$, причём: обратная функция $x=\sqrt{y}$ задает правую ветку параболы; обратная функция $x=-\sqrt{y}$ задает левую ветку параболы.

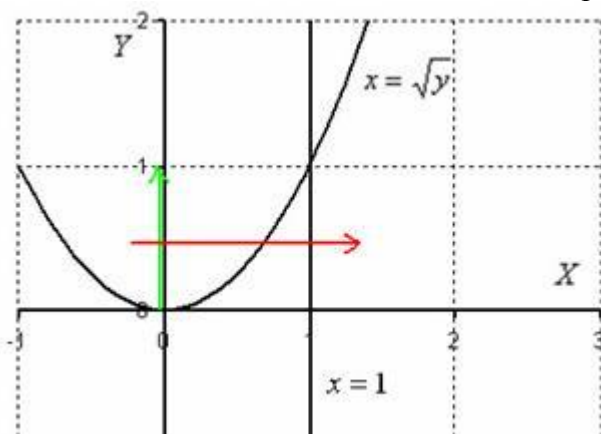
Могут возникнуть сомнения, вот, к примеру, функция $x=\sqrt{y}$ определяет левую или правую ветвь параболы? Сомнения развеять очень просто: возьмите какую-нибудь точку параболы, например, (1; 1) (с правой ветви) и подставьте её координаты в любое уравнение, например, в то же уравнение $x=\sqrt{y}$:

$$1=\sqrt{1}$$

$$1=1$$

Получено верное равенство, значит, функция $x=\sqrt{y}$ определяет именно правую ветвь параболы, а не левую.

Обходим область интегрирования вторым способом:



Лазерную указку держим **слева** от области интегрирования. Луч лазера проходит область **строго слева направо**. В данном случае он входит в область через ветвь параболы $x=\sqrt{y}$ и выходит из области через прямую, которая задана уравнением $x=1$ (красная стрелка). Чтобы просканировать лазером всю область, нужно провести указкой вдоль оси OY **строго снизу вверх** от 0 до 1 (зеленая стрелка).

Таким образом: «икс» изменяется от \sqrt{y} до 1; «игрек» изменяется от 0 до 1.

Порядок обхода области следует записать в виде неравенств:

$$\sqrt{y} \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1$$

И, следовательно, переход к повторным интегралам таков:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx$$

Ответ можно записать следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx$$

Окончательный результат вычислений не зависит от того, какой порядок обхода области мы выбрали (поэтому поставлен знак равенства). Но, до конечного результата ещё далеко, сейчас наша задача – лишь правильно расставить пределы интегрирования.

5. Вычисление площадей и объемов с помощью интегралов.

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a, b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (8)$$

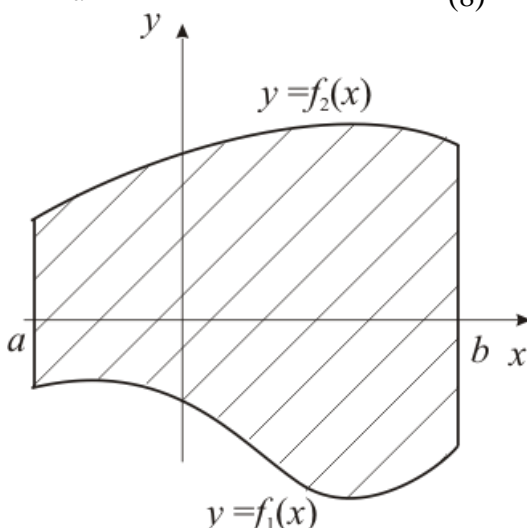


Рис. 1

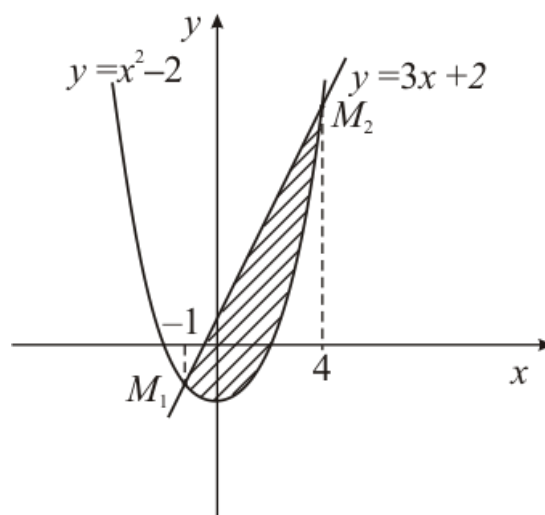


Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, \quad y = 3x + 2.$$

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
y	-2	-1	-1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$, $y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$. Итак, $M_1(-1, -1)$, $M_2(4, 14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой

$$f_2(x) = 3x + 2, \quad f_1(x) = x^2 - 2, \quad \text{поскольку } f_2(x) \geq f_1(x) \text{ для всех } x \in [-1, 4].$$

Получим:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 (3x + 2 - (x^2 - 2)) dx = \int_{-1}^4 (3x - x^2 + 4) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-1}^4 = \\ &= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1) \right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 = \\ &= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20 \frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t \in [t_0, t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1], \text{ прямыми } x = a, x = b, \text{ где } a = x(t_0),$$

$b = x(t_1)$, и осью ОХ, вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt \right|. \quad (9)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Рис. 3

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (х, у) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра t , $0 \leq t \leq 2\pi$.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	-2	0	2
y	0	3	0	-3	0

Нанесем точки (х, у) на координатную плоскость ХОУ и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π , соответствующая точка (х, у) описывает

эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ — параметрические формулы, задающие

эллипс с полуосями а и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей ОХ и ОУ, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции АОВ. Согласно формуле (9) получим:

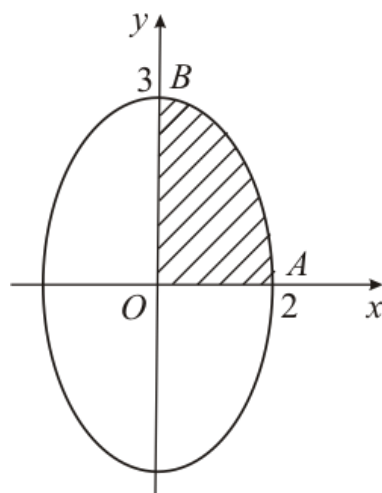


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin t (2 \cos t)' dt \right| = 4 \left| -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2 \alpha \text{ из таблицы 2} \end{array} \right\} = \\
 &= 4 \left| -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt \right| = 4 \left| -3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \right| = 4 \left| -3 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= 4 \left| -3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) \right| = 4 \left| -3 \frac{\pi}{2} \right| = 6\pi \approx 18,850 \text{ (кв. ед.)}.
 \end{aligned}$$

Длина дуги плоской кривой

1. Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную при всех $x \in [a, b]$, то длина дуги AB (рис. 4) этой кривой,

заключенной между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, вычисляется по формуле:

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (10)$$

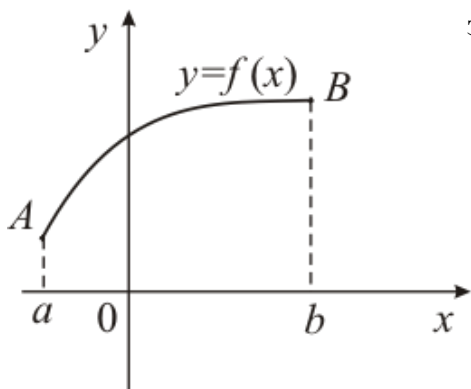


Рис. 4

2. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_0 \leq t \leq t_1$, и функции $x(t)$, $y(t)$ имеют

непрерывные производные 1-го порядка при всех $t \in [t_0, t_1]$, то длина дуги AB , соответствующей изменению параметра от t_0 до t_1 , вычисляется по формуле:

$$l_{AB} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (11)$$

Пример. Найти длину дуги кривой

а) $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$; б) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то для

вычисления длины дуги воспользуемся формулой (10). Найдем y' : $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$ и

подставим в (10):

$$\begin{aligned} l_{AB} &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + \frac{9x}{4}, dt = \frac{9}{4}dx, dx = \frac{4}{9}dt, \\ x = 0 \rightarrow t = 1, \\ x = 1 \rightarrow t = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}. \end{array} \right| = \\ &= \frac{4}{9} \int_1^{13/4} t^{1/2} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{4}{9} \frac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_1^{13/4} = \frac{8}{27} t^{3/2} \Big|_1^{13/4} = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{13}{4} \right)^{3/2} - 1 \right) = \\ &= \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right) \approx 1,440 \text{ (единиц длины)}. \end{aligned}$$

б) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (11). Найдем

$x'(t)$, $y'(t)$:

$x'(t) = -2\sin t + 2\sin 2t$, $y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$ и подставим в (11):

$$\begin{aligned}
l_{AB} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t + 2\sin 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2} dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t - 8\sin t \sin 2t + 4\sin^2 2t + 4\cos^2 t - 8\cos t \cos 2t + 4\cos^2 2t} dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t) + 4(\sin^2 2t + \cos^2 2t) - 8(\cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t)} dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{используем тригонометрические формулы} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ и } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos t} dt = \\
&= \sqrt{8} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\
&= 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -8\cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -8(\cos \pi - \cos 0) = -8(-1 - 1) = 16 \text{ (единиц длины)}.
\end{aligned}$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью ОХ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (12)$$

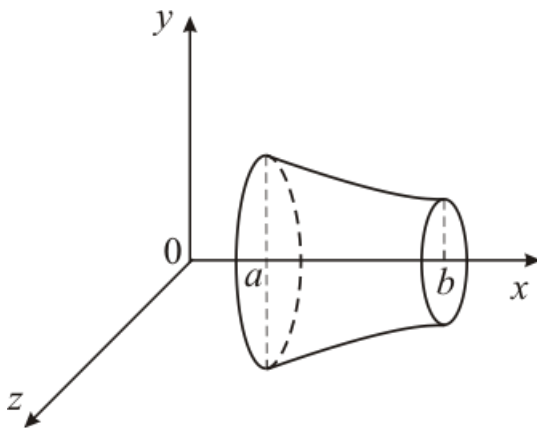


Рис. 5

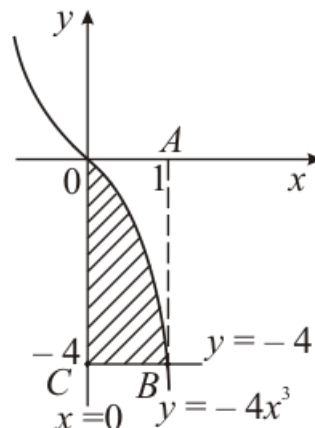


Рис. 6

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3$, $x = 0$, $y = -4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры ОАВС, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры ОАВ. Тогда искомый

объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2 :

$$V_1 = \pi \int_0^1 (-4)^2 dx = \pi 16x \Big|_0^1 = 16\pi \text{ (ед. объема);}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (-4x^3)^2 dx = 16\pi \int_0^1 x^6 dx = 16\pi \frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43,085 \text{ (ед. объема).}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2, y = 1 - 2x$

2) $y = x^3, y = 8, x = 0$

3) $y = 3x^2 + 1, y = 3x + 6$

4) $y = x^2, y = x + 1$

5) $y = x^2, y = 2 - x^2$

6) $y = x^2 - 1, y = 1 - x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x = 2t - t^2, y = t(t - 1), 0 \leq t \leq 1$

2) $x = t^2 - 1, y = t^3 - t, 0 \leq t \leq 1$

3) $x = 2\sin t, y = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$

4) $x = \ln t, y = (t - 1)(3 - t), 1 \leq t \leq 3$

5) $x = 1 - \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

6) $x = \cos t, y = 1 - \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

Задание 3. Найти длину дуги кривой.

1) $y = 1 + \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

2) $x = t^2 - 1, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$

3) $y = x^{\frac{2}{3}} + 1, 0 \leq x \leq 1$

4) $x = t^2 - 1, y = \frac{t}{3} - t^3, 1 \leq t \leq 2$

5) $y = x^{\frac{2}{3}}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

6) $x = t^3 - 4, y = t^2, 0 \leq t \leq 2$

Задание 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2 - y = 0, y = 1$

2) $x^2 + y = 0, y = -1$

- 3) $x - y^2 = 0, \quad x = 1$
 4) $y = 4x^3, \quad x = 0, \quad y = -4$
 5) $y = 4x^3, \quad x = 1, \quad y = 0$
 6) $y = -4x^3, \quad x = -1, \quad y = 0$

Раздел III. Основы теории комплексных чисел

1. Мнимая единица. Алгебраическая форма комплексных чисел.

Неразрешимость уравнения $x^2 + 1 = 0$ на множестве действительных чисел привела к введению так называемой мнимой единицы i , т.е. мнимого (придуманного) числа, обладающего свойством: $i^2 = -1$.

Тогда $x^2 + 1 = 0$ имеет два решения: $x_1 = i, \quad x_2 = -i$.

Числа, вида bi , где $b \in R$, i – мнимая единица, называют мнимыми числами.

Например, $4i, -3i, 0,45i, \sqrt{2}i$, и т.п.

Числа, вида $a + bi$, где $a, b \in R$, i – мнимая единица, называют комплексными числами.

Например, $5 + 4i, 7 - 3i, 25 + 45i, -2 - \sqrt{3}i$, и т.п.

Форма записи $z = a + bi$ называется алгебраической.

a – действительная часть: $\operatorname{Re}(z)$ bi – мнимая часть: $\operatorname{Im}(z)$

Такая запись позволят записывать не только комплексные числа, но и чисто мнимые и действительные, например:

Действительные числа $b = 0$	Мнимые числа $a = 0$
$5 + 0i = 5$	$0 + 4i = 4i$
$-\sqrt{5} + 0i = -\sqrt{5}$	$0 - 7,8i = -7,8i$

Во множестве комплексных чисел нет понятий «больше», «меньше», «положительное», «отрицательное».

Числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Числа $z = a + bi$ и $-z = -a - bi$ называются противоположными.

Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются сопряженными.

1.1. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

Решением квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом всегда будут два сопряженных комплексных числа.

Пример 1: решить квадратное уравнение $x^2 + 4x + 29 = 0$.

Решение.

Вычислим дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = 16 - 116 = -100 < 0.$$

Представляем отрицательное число как произведение (-1) и положительного числа и заменяем (-1) на i^2 :

$$D = -100 = -1 \cdot 100 = i^2 \cdot 10^2.$$

$$\text{Найдем } \sqrt{D} = \sqrt{i^2 \cdot 10^2} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{10^2} = i \cdot 10.$$

Находим корни уравнения:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + i \cdot 10}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{10i}{2} = -2 + 5i;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - i \cdot 10}{2} = \frac{-4}{2} - \frac{10i}{2} = -2 - 5i.$$

Ответ: два сопряженных комплексных числа: $x_1 = -2 + 5i$ и $x_2 = -2 - 5i$.

1.2. Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме

$$\text{Сумма} \quad z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$\text{Разность} \quad z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$\text{Произведение} \quad z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

$$\text{Частное} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{числитель и знаменатель умножают на число,} \\ \text{сопряженное знаменателю, чтобы избавиться от} \\ \text{комплексного числа в знаменателе} \end{array} \right)$$

Рекомендуется для упрощения вычислений при делении, вывести формулу для умножения двух сопряженных комплексных чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2$$

Пример 2. Выполнить арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = 6 - 9i$.

Решение.

$$1) \quad z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (6 - 9i) = 4 + 6 + 5i - 9i = 10 - 4i;$$

$$2) \quad z_1 - z_2 = (4 + 5i) - (6 - 9i) = 4 - 6 + 5i + 9i = -2 + 14i;$$

$$3) \quad z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (6 - 9i) = 24 - 36i + 30i - 45i^2 = 24 - 6i - 45 \cdot (-1) = 69 - 6i;$$

$$4) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 5i}{6 - 9i} = \frac{(4 + 5i) \cdot (6 + 9i)}{(6 - 9i)(6 + 9i)} = \frac{24 + 36i + 30i + 45i^2}{36 + 81} = \frac{15 + 66i}{117} = \frac{5 + 22i}{39} = \frac{5}{39} + \frac{22}{39}i.$$

$$\text{Ответ. } z_1 + z_2 = 10 - 4i; \quad z_1 - z_2 = -2 + 14i; \quad z_1 \cdot z_2 = 69 - 6i; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{39} + \frac{22}{39}i$$

1.3. Натуральная степень мнимой единицы i

Найдем первый четыре степени i:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1.$$

Учитывая, что $i^4 = 1$, найдем старшие степени:

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i, \quad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

Очевидно, что все остальные степени i будут равны одному из предыдущих четырех значений.

Что бы возвести i в натуральную степень, надо показатель степени разделить на 4, и возвести i в степень, равную остатку от деления.

Пример 3: Найти i^{16} , i^{11} , i^{22} , i^{37} .

Решение.

$$i^{16} = i^{4 \cdot 4 + 0} = i^0 = 1;$$

$$i^{11} = i^{4 \cdot 2 + 3} = i^3 = -i;$$

$$i^{22} = i^{4 \cdot 5 + 2} = i^2 = -1;$$

$$i^{37} = i^{4 \cdot 9 + 1} = i^1 = i.$$

Ответ. $i^{16} = 1$, $i^{11} = -i$, $i^{22} = -1$, $i^{37} = i$.

2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Плоскость называется комплексной, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точки плоскости с координатами $z(x, y)$, причем, это соответствие взаимно-однозначное (рис. 1).

Ось OX называется действительной осью, т. к. на ней расположены точки, соответствующие числам, у которых $y = 0$.

Ось OY называется мнимой осью, т. к. на ней расположены точки, соответствующие числам, у которых $x = 0$.

Таким образом, любое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить на плоскости точкой с координатами (a, b) , причем взаимно однозначно.

С каждой точкой $z(x, y)$ комплексной плоскости связан радиус-вектор этой точки (рис. 1).

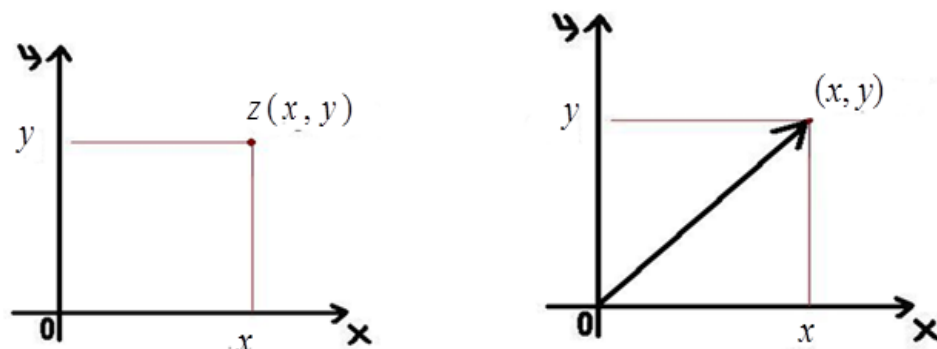


Рисунок 1

Сложение и вычитание комплексных чисел можно выполнить по правилу параллелограмма (правило сложения и вычитания векторов), которое заключается в следующем: нужно построить параллелограмм на векторах, полученных при геометрическом представлении этих чисел. Результату суммирования будет соответствовать вектор-диагональ этого параллелограмма. При выполнении вычитания

нужно учитывать, что разность z_1 и z_2 будет соответствовать сумме z_1 и $-z_2$. Т.е.
 $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Пример 4. Даны два комплексных числа: $z_1 = 1 - 5i$ и $z_2 = 2 - 3i$.

Изобразить их на комплексной плоскости и результаты их сложения и вычитания (рис. 2).
 Решение.

$$z_1 + z_2 = (1 - 5i) + (2 - 3i) = 3 - 8i$$

$$z_1 - z_2 = (1 - 5i) - (2 - 3i) = -1 - 2i$$

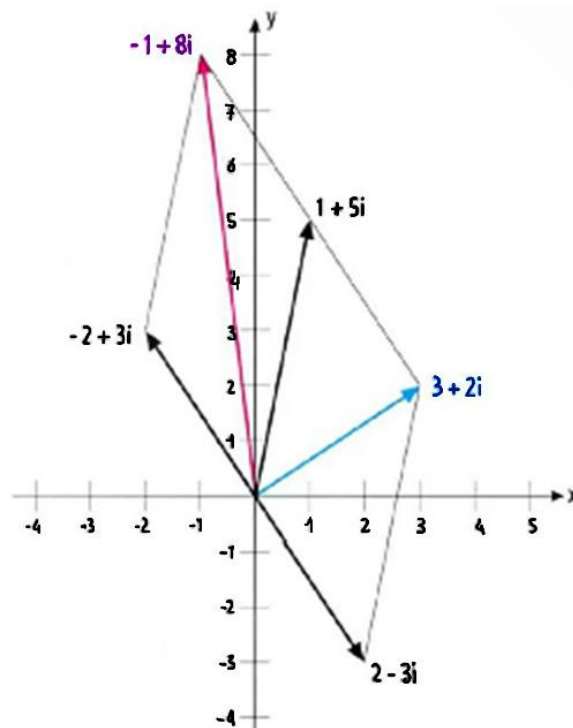


Рисунок 2

Длина r вектора, соответствующего комплексному числу z называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$.

Угол φ , образованный радиус-вектором с положительным направлением оси Ox , называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\arg z$ (рис. 3).

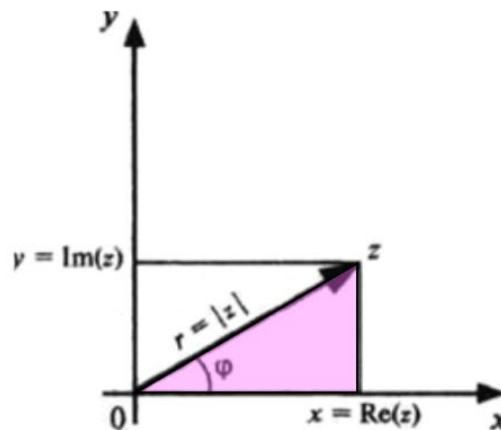


Рисунок 3

Рассматривая на рис. 3 выделенный прямоугольный треугольник, получаем соотношения:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x};$$

$$x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi; \quad x = y / \operatorname{tg} \varphi; \quad y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Пример 5: Задано комплексное число $z = 1 - i$. Найти $|z|$ и $\arg z$.

Решение.

$$z = 1 - i, \text{ значит, } x = 1, \quad y = -1;$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ;$$

$$\text{Ответ: } |z| = \sqrt{2}; \quad \arg z = \varphi = -\frac{\pi}{4} \quad (\text{рис. 4})$$

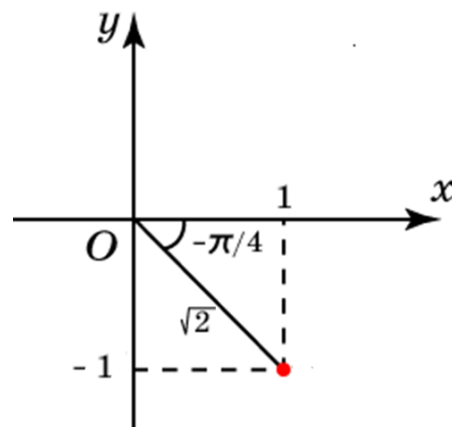


Рисунок 4

3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Заменяя в алгебраической форме записи комплексного числа $z = x + yi$ x и y соотношениями $x = r \cdot \cos \varphi$ $y = r \cdot \sin \varphi$, получим:

$z = x + yi = r \cdot \cos \varphi + r \cdot \sin \varphi \cdot i = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, т.е. тригонометрическую форму записи комплексного числа.

Тригонометрическая форма: $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

Пример 6. Перевести в тригонометрическую форму комплексное число $z = \sqrt{3} + i$.

Решение.

$$z = \sqrt{3} + i, \text{ значит, } x = \sqrt{3}, \quad y = 1;$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

Таким образом, тригонометрическая форма данного комплексного числа имеет вид:

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ. $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right).$

Пример 7. Перевести в алгебраическую форму комплексное число, заданное в тригонометрической форме $z = 10(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$.

Решение.

$$z = 10(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ), \text{ значит, } r = 10, \varphi = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = r \cdot \cos \varphi = 10 \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = 10 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5\sqrt{3},$$

$$y = r \cdot \sin \varphi = 10 \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

Таким образом, алгебраическая форма данного комплексного числа имеет вид:

$$z = x + yi = -5\sqrt{3} + 5i.$$

Ответ. $z = -5\sqrt{3} + 5i.$

3.1. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Умножение $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Деление $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Возведение в степень $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$ (формула Муавра)

Извлечение корня $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

4. Показательная форма комплексного числа

В 1740 году Леонард Эйлер опубликовал формулу, связывающую комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \text{— формула Эйлера.}$$

Таким образом, если комплексное число задано в тригонометрической форме $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, то на основании формулы Эйлера, выражение в скобках можно заменить на показательное выражение. В результате получим показательную форму комплексного числа:

Показательная форма: $z = r \cdot e^{i\varphi}$

4.1. Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме.

Пусть $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$

Умножение $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Деление $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Возведение в степень $(z)^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$

Извлечение корня $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Пример 8. Даны два комплексных числа z_1 и z_2 .

$$z_1 = 4(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ) \quad z_2 = \frac{1}{2}(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$$

Произвести действия $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 в тригонометрической и показательной форме. Результат записать в алгебраической форме.

Решение.

Из записи чисел имеем: $r_1 = 4$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $\varphi_1 = 150^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$.

Тригонометрическая форма:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos(150^\circ + 90^\circ) + i \cdot \sin(150^\circ + 90^\circ)) = \\ &= 2(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = -1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = 4 : \frac{1}{2} (\cos(150^\circ - 90^\circ) + i \cdot \sin(150^\circ - 90^\circ)) = \\ &= 8(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ) = 8 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 4 + 4\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Показательная форма:

$$z_1 = 4e^{i \cdot 150^\circ} \quad z_2 = \frac{1}{2}e^{i \cdot 90^\circ}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{i(150^\circ + 90^\circ)} = 2e^{i240^\circ} =$$

$$2(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = -1 - \sqrt{3}i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = 4 : \frac{1}{2} e^{i(150^\circ - 90^\circ)} = 8e^{i60^\circ} = 8(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ) =$$

$$= 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 + 4\sqrt{3}i.$$

Ответ. $z_1 \cdot z_2 = -1 - \sqrt{3}i$, $\frac{z_1}{z_2} = 4 + 4\sqrt{3}i$.

Как видно из примеров, показательная форма упрощает запись вычислений, и оформление решения делает более компактным.

Пример 9. Вычислить $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$.

Решение.

Запишем данное комплексное число в показательной форме:

$$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, \text{ значит, } x = \sqrt{2}, \quad y = -\sqrt{2};$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$

Таким образом, показательная форма данного комплексного числа имеет вид:

$$z = re^{i\varphi} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Вычислим z^{10} :

$$z^{10} = r^{10} e^{i \cdot 10\varphi} = 2^{10} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} \cdot 10\right)}$$

Переведем полученный результат в алгебраическую форму $x + iy$.

$$1024e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} = 1024\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1024(0 + i \cdot (-1)) = -1024i.$$

Ответ: $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10} = -1024i$.

Пример 10. Найти все корни уравнения $z^4 - 16 = 0$.

Решение.

Запишем число 16 в показательной форме: $16 = 16e^{i0^\circ}$, т.е. $r = 16$, $\varphi = 0^\circ$.
Тогда

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$z = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16} e^{i \frac{0 + 2\pi k}{4}} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

При $k = 0$:

$$z_1 = \sqrt[4]{16} e^{i \frac{0}{4}} = 4e^{i0} = 2(\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 2(1 + i \cdot 0) = 2$$

При $k = 1$:

$$z_2 = \sqrt[4]{16} e^{i \frac{0+2\pi}{4}} = 2e^{i \frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$$

При $k = 2$:

$$z_3 = \sqrt[4]{16} e^{i \frac{0+4\pi}{4}} = 2e^{i\pi} = 2(\cos \pi + i \cdot \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2$$

При $k = 3$:

$$z_4 = \sqrt[4]{16} e^{i \frac{0+6\pi}{4}} = 2e^{i \frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot (-1)) = -2i$$

Ответ. $z_1 = 2$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -2i$.

Вывод:

- Алгебраическая форма удобна при сложении и вычитании,
- Показательная форма удобна при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня;
- Тригонометрическая форма служит для перевода показательной формы в алгебраическую.

5. Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение:

1) $x^2 + 4x + 29 = 0$

2) $x^2 + 36 = 0$

3) $x^2 - 13x + 48 = 0$

4) $x^2 + 6x + 18 = 0$

5) $x^2 + 4 = 0$

6) $x^2 + 7x + 20 = 0$

7) $x^2 + 7 = 0$

8) $x^3 + 8 = 0$

9) $x^2 - 2x + 10 = 0$

10) $x^2 - 2x + 11 = 0$

2. Даны два комплексных числа z_1 и z_2 .

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2

1) $z_1 = 2 - 8i$

2) $z_1 = 1 - 2i$

3) $z_1 = 2 - i$

$z_2 = 3 - 2i$

$z_2 = 1 + 2i$

$z_2 = 2i - 3$

4) $z_1 = 4 + 5i$

5) $z_1 = 3$

6) $z_1 = 3 - 4i$

$z_2 = 6 - 9i$

$z_2 = 1 - 3i$

$z_2 = 3 + 4i$

7) $z_1 = 3 - 5i$

8) $z_1 = 4$

9) $z_1 = -2i$

$z_2 = 2i - 4$

$z_2 = 2i$

$z_2 = 1 - i$

3. Выполнить действия:

1) $\frac{(1+2i)(2+i)}{3-2i}$

2) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$

3) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$

4. Вычислить:

- 1) i^{16} 2) i^{11} 3) i^{22} 4) i^{37} 5) i^{14} 6) i^{24} 7) i^{34} 8) i^{35}
9) $i^{52} + 2 \cdot i^{83} - 3 \cdot i^{61} + 5 \cdot i^{38}$ 10) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$
11) $i + i^{21} - 4i^{37} - i^{42} + 3i^{55}$ 12) $i^{42} + 2 \cdot i^{53} - 3 \cdot i^{71} + 5 \cdot i^{108}$
13) $\frac{2-3i}{5+i^{11}}$ 14) $\frac{1+i^{17}}{i^{23}}$

5. Изобразите на комплексной плоскости числа

- 1) $z = 3 + 2i$ 2) $z = -4 + 3i$ 3) $z = 2$ 4) $z = -6i$

6. Задано комплексное число z . Найти $|z|$ и $\arg z$.

- 1) $z = 1 + i$ 2) $z = 2i$ 3) $z = -2$ 4) $z = -\sqrt{3} + i$

7. Перевести в тригонометрическую и в показательную форму комплексное число

- 1) $z = 1 - i$ 2) $z = \sqrt{3} + i$ 3) $z = 5$ 4) $z = -4i$
5) $z = -1 + i\sqrt{3}$ 6) $z = 5 - 5i$

8. Перевести в алгебраическую форму комплексное число

$$z = 10(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$$

9. Даны два комплексных числа z_1 и z_2 . Найти $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2

- 1) $z_1 = 4(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$ 2) $z_2 = \frac{1}{2}(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$

10. Выполнить действия и результат представить в алгебраической форме:

- 1) $6(\cos 19^\circ + i \cdot \sin 19^\circ) \cdot 8(\cos 31^\circ + i \cdot \sin 31^\circ) \cdot \frac{1}{24}(\cos 40^\circ + i \cdot \sin 40^\circ)$
2) $\frac{1/2(\cos 210^\circ + i \cdot \sin 210^\circ)}{1/4(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)}$ 3) $\frac{2(\cos 72^\circ + i \cdot \sin 72^\circ) \cdot 3(\cos 28^\circ + i \cdot \sin 28^\circ)}{0.3(\cos 160^\circ + i \cdot \sin 160^\circ)}$
4) $\frac{1}{0.2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right)}$ 5) $10e^{i15^\circ} \cdot 12e^{i30^\circ}$ 6) $27e^{i86^\circ} : 18e^{i26^\circ}$
7) $(10 + 10i)^4$ 8) $[2(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ)]^6$ 9) $(\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ)^3$
10) $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$ 11) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$ 12) $\frac{(1-i)^5 \cdot i}{2e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}}$

11. Проверить равенство $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 2$

12. Вычислить все значения корня $\sqrt[3]{27i}$ и построить их геометрические изображения.

13. Найти все корни уравнения и построить их геометрические изображения.

- 1) $z^4 - 16 = 0$; 2) $z^4 - 81 = 0$.

Раздел IV. Основы теории вероятностей и математической статистики

1. События. Комбинации событий. Противоположное событие. Вероятность события. Сложение вероятностей. Независимые события. Умножение вероятностей. Статистическая вероятность.

1.Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью $P(A)$ события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m , благоприятствующих событию A , к числу всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое вероятностью события A .

Если события $A_1, A_2 \dots$ попарно несовместны, то $P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю $P=0$.

Вероятность достоверного события равна единице $P=1$.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: $0 < P(A) < 1$.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность

$$P = \frac{11}{34}$$

События A и B называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: $P(AB)=P(A) \cdot P(A/B)$ или $P(BA)=P(A) \cdot P(B/A)$

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$.

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$$n_1 = 10$$

$$m_1 = 4$$

$$p_1 = \frac{4}{10}$$

$$n_2 = 10$$

$$m_2 = 3$$

$$p_2 = \frac{3}{10}$$

$$\text{Тогда вероятность того, что обе ручки красные: } p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0,12$$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, \dots , которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) + \dots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(A) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A/H_i)}{p(A)}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$$n = 20 + 30 + 50 = 100$$

$$p(H_1) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$p(H_2) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$p(H_3) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$p(A/H_1) = 0,7$$

$$p(A/H_2) = 0,8$$

$$p(A/H_3) = 0,9$$

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) = \\ = 0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,83} \approx 0,169$$

Пример 2: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие A – извлекается белый шар.

Тогда, пусть H_1 – шар из первой урны, H_2 – шар из второй урны и H_3 – шар из третьей урны. Тогда событие A/H_1 – белый шар из первой урны, A/H_2 – белый шар из второй урны и A/H_3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

$$p(H_1) = \frac{1}{3}$$

$$p(H_2) = \frac{1}{3}$$

$$p(H_3) = \frac{1}{3}$$

$$p(A/H_1) = \frac{5}{12}$$

$$p(A/H_2) = 1$$

$$p(A/H_3) = 0$$

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2) + p(H_3) \cdot p(A/H_3) = \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{5}{36} + \frac{1}{3} = \frac{17}{36}$$

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие A наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, m = 0, 1, 2, \dots, n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$$p = 0,2$$

$$n = 6$$

$$m = 2$$

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = C_6^2 0,2^2 (1-0,2)^{6-2} = \frac{6!}{4!2!} \cdot 0,04 \cdot 0,8^4 \approx 0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(m \geq 1) = 1 - q^n, q = 1 - p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$$p = 0,6 \Rightarrow q = 0,4$$

$$n = 6$$

$$m \geq 1$$

$$P_6(m \geq 1) = 1 - 0,4^6 \approx 0,9959$$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(m)$

Пример 3: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$$p = 0,7$$

$$n = 5$$

$$2 \leq m \leq 4$$

$$P_5(2 \leq m \leq 4) = C_5^2 \cdot 0,7^2 (1-0,7)^{5-2} + C_5^3 \cdot 0,7^3 (1-0,7)^{5-3} + C_5^4 \cdot 0,7^4 (1-0,7)^{5-4} \approx 0,801$$

4) Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли,

вычисляется по формуле $np - q \leq m_0 \leq np + p$
 $np - (1 - p) \leq m_0 \leq np + p$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$$p = 0,05$$

$$n = 50$$

$$m_0 - ?$$

$$q = 1 - p = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$50 \cdot 0,05 - 0,95 \leq m_0 \leq 50 \cdot 0,05 + 0,05$$

$$1,55 \leq m_0 \leq 2,55$$

$$m_0 = 2$$

2. Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина X – это числовая функция $X = f(\omega_i)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(X) = M(X - M(X))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то $M(X) = np$ $D(X) = npq$

Пример 1: Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 = 0,2 + 2 + 2,4 + 1,8 = 6,4$$

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 + 64 \cdot 0,3 + 81 \cdot 0,2 = 45,8$$

$$D(X) = 45,8 - 6,4^2 = 4,84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,84} = 2,2$$

Пример 2: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(X) = 100 \cdot 0,05 = 5$$

$$D(X) = 100 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 4,75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,75} = 2,18$$

Содержание практической работы

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадет стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру $=0,5$, ко второму $=0,6$. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером $=0,94$, а вторым $=0,92$. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время T равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время T прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $=0,3$. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек $=0,3$. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?

9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна p . Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Задание 4. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X , зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

4. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

5. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появления события в этих испытаниях.

3. Функция Лапласа. Плотность распределения системы двух случайных величин. Правило произведения. Перестановки. Размещения. Теория массового обслуживания.

Теоретические сведения к практической работе

Определение. Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};$$

Нормальный закон распределения также называется **законом Гаусса**.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Можно легко показать, что параметры m_x и σ_x , входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины X .

Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой** или **кривой Гаусса**.

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

- 1) Функция определена на всей числовой оси.
- 2) При всех x функция распределения принимает только положительные значения.
- 3) Ось OX является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента x , значение функции стремится к нулю.
- 4) Найдем экстремум функции.

$$y' = -\frac{x-m}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0; \quad x = m;$$

Т.к. при $y' > 0$ при $x < m$ и $y' < 0$ при $x > m$, то в точке $x = m$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$.

5) Функция является симметричной относительно прямой $x = m$, т.к. разность $(x - m)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате.

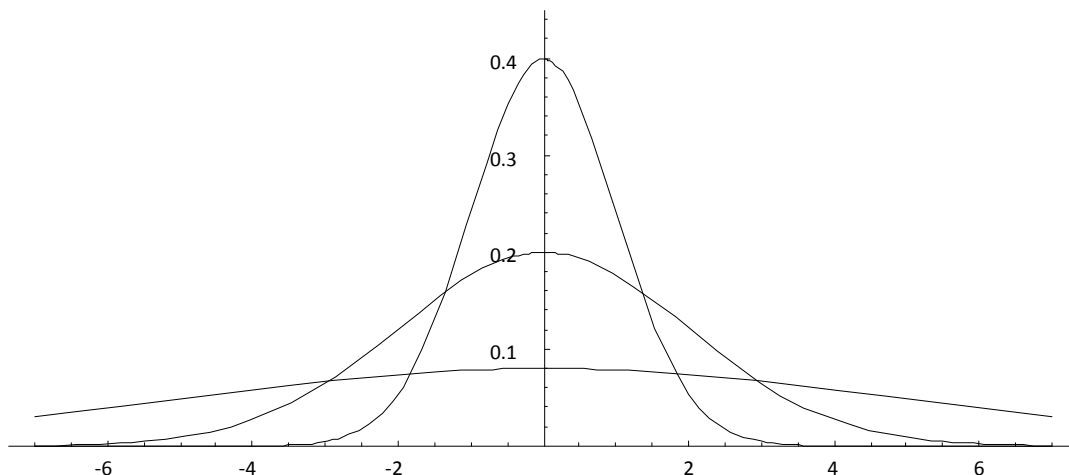
6) Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную функции плотности.

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-m)^2}{\sigma^2} \right]$$

При $x = m + \sigma$ и $x = m - \sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, т.е. в этих точках функция имеет перегиб.

В этих точках значение функции равно $\frac{1}{\sigma e \sqrt{2\pi}}$.

Построим график функции плотности распределения.



Построены графики при $t = 0$ и трех возможных значениях среднего квадратического отклонения $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ и $\sigma = 7$. Как видно, при увеличении значения среднего квадратического отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается. Если $a > 0$, то график сместится в положительном направлении, если $a < 0$ – в отрицательном. При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая называется **нормированной**. Уравнение нормированной кривой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функция Лапласа

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Обозначим $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t$; $\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha$; $\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta$;

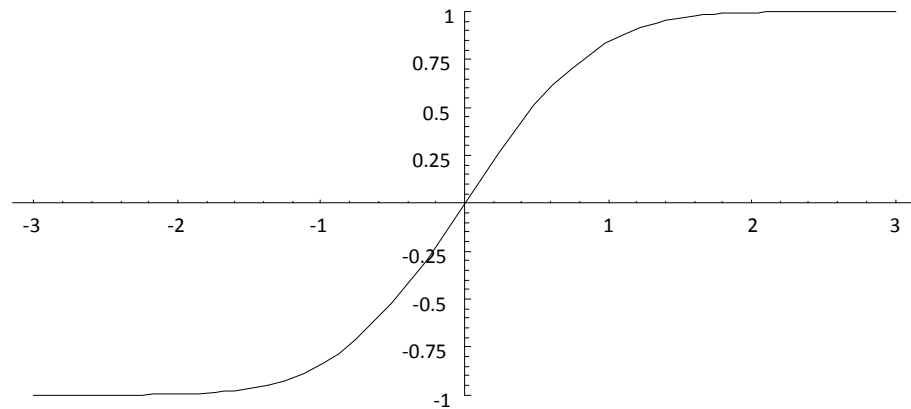
Тогда $P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} \sigma \sqrt{2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} [\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]$

Т.к. интеграл $\int e^{-t^2} dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

которая называется **функцией Лапласа** или **интегралом вероятностей**.

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах. Ниже показан график функции Лапласа.



Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

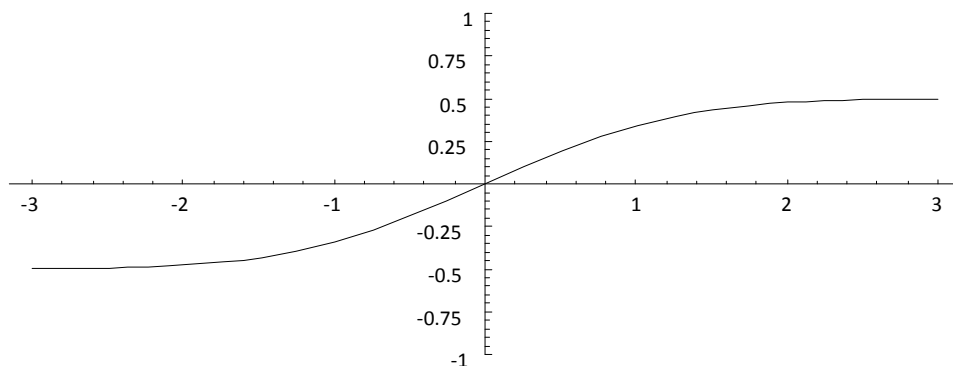
- 1) $\Phi(0) = 0$;
- 2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 3) $\Phi(\infty) = 1$.

Функцию Лапласа также называют **функцией ошибок** и обозначают $\text{erf } x$.

Еще используется **нормированная** функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением:

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt;$$

Ниже показан график нормированной функции Лапласа.



При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный как **правило трех сигм**.

Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины Δ :

$$P(|X - m| < \Delta) = \bar{\Phi}\left[\frac{m + \Delta - m}{\sigma}\right] - \bar{\Phi}\left[\frac{m - \Delta - m}{\sigma}\right] = \bar{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] - \bar{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right] = 2\bar{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]$$

Если принять $\Delta = 3\sigma$, то получаем с использованием таблиц значений функции Лапласа:

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 2\bar{\Phi}(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.

Это правило называется **правилом трех сигм**.

На практике считается, что если для какой-либо случайной величины выполняется правило трех сигм, то эта случайная величина имеет нормальное распределение.

Пример. Поезд состоит из 100 вагонов. Масса каждого вагона – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 65$ т и средним квадратичным отклонением $\sigma = 0,9$ т. Локомотив может везти состав массой не более 6600 т, в противном случае необходимо прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что второй локомотив не потребуется.

Второй локомотив не потребуется, если отклонение массы состава от ожидаемого ($100 \cdot 65 = 6500$) не превосходит $6600 - 6500 = 100$ т. Т.к. масса каждого вагона имеет нормальное распределение, то и масса всего состава тоже будет распределена нормально.

Получаем:

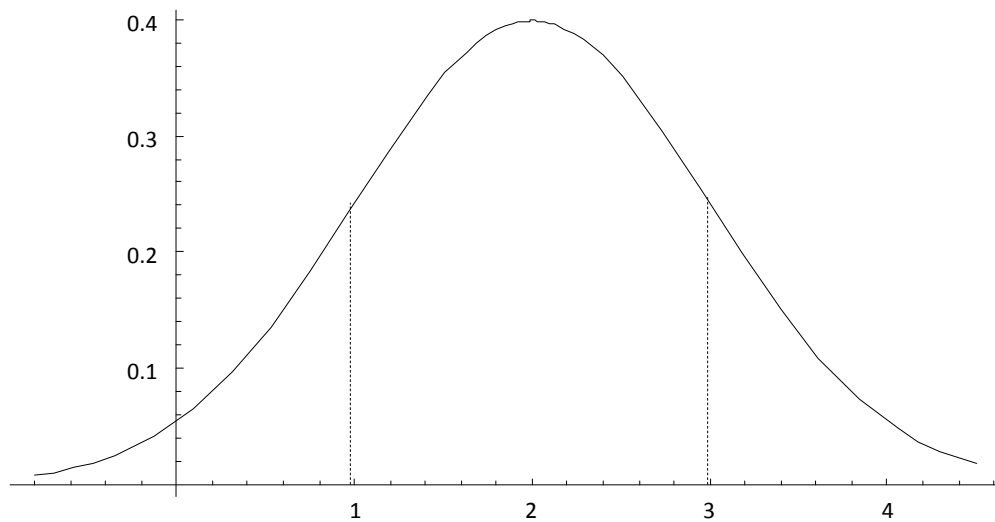
$$P(|X - M(X)| < 100) = 2\bar{\Phi}\left[\frac{100}{100\sigma}\right] = 2\bar{\Phi}[1,111] = 2 \cdot 0,3665 = 0,733$$

Пример. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами – $a = 2$ – математическое ожидание и $\sigma = 1$ – среднее квадратическое отклонение. Требуется написать плотность вероятности и построить ее график, найти вероятность того, X примет значение из интервала $(1; 3)$, найти вероятность того, что X отклонится (по модулю) от математического ожидания не более чем на 2.

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}};$$

Построим график:



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 3).

$$P(1 < X < 3) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [\Phi(0,7071) + \Phi(0,7071)] = 0,6778.$$

Найдем вероятность отклонение случайной величины от математического ожидания на величину, не большую чем 2.

$$P(|X - 2| < 2) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) \approx 0,95.$$

Тот же результат может быть получен с использованием нормированной функции Лапласа.

$$P(|X - 2| < 2) = 2\overline{\Phi}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\overline{\Phi}(2) = 2 \cdot 0,4772 \approx 0,95.$$

Центральная предельная теорема Ляпунова

Теорема. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

На практике для большинства случайных величин выполняются условия теоремы Ляпунова.

Система случайных величин

Рассмотренные выше случайные величины были одномерными, т.е. определялись одним числом, однако, существуют также случайные величины, которые определяются двумя, тремя и т.д. числами. Такие случайные величины называются двумерными, трехмерными и т.д.

В зависимости от типа, входящих в систему случайных величин, системы могут быть дискретными, непрерывными или смешанными, если в систему входят различные типы случайных величин.

Более подробно рассмотрим системы двух случайных величин.

Определение. Законом распределения системы случайных величин называется соотношение, устанавливающее связь между областями возможных значений системы случайных величин и вероятностями появления системы в этих областях.

Определение. Функцией распределения системы двух случайных величин называется функция двух аргументов $F(x, y)$, равная вероятности совместного выполнения двух неравенств $X < x, Y < y$.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Отметим следующие свойства функции распределения системы двух случайных величин:

1) Если один из аргументов стремится к плюс бесконечности, то функция распределения системы стремится к функции распределения одной случайной величины, соответствующей другому аргументу.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F_1(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F_2(y);$$

2) Если оба аргумента стремятся к бесконечности, то функция распределения системы стремится к единице.

$$F(\infty, \infty) = 1;$$

3) При стремлении одного или обоих аргументов к минус бесконечности функция распределения стремится к нулю.

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0;$$

4) Функция распределения является неубывающей функцией по каждому аргументу.

5) Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, вычисляется по формуле:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Плотность распределения системы двух случайных величин

Определение. Плотностью совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная от функции распределения.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Если известна плотность распределения, то функция распределения может быть легко найдена по формуле:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy$$

Двумерная плотность распределения неотрицательна и двойной интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

По известной плотности совместного распределения можно найти плотности распределения каждой из составляющих двумерной случайной величины.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy; \quad F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy;$$

Условные законы распределения

Как было показано выше, зная совместный закон распределения можно легко найти законы распределения каждой случайной величины, входящей в систему.

Однако, на практике чаще стоит обратная задача – по известным законам распределения случайных величин найти их совместный закон распределения.

В общем случае эта задача является неразрешимой, т.к. закон распределения случайной величины ничего не говорит о связи этой величины с другими случайными величинами.

Кроме того, если случайные величины зависимы между собой, то закон распределения не может быть выражен через законы распределения составляющих, т.к. должен устанавливать связь между составляющими.

Все это приводит к необходимости рассмотрения условных законов распределения.

Определение. Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, называется условным законом распределения.

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения так и плотностью распределения.

Условная плотность распределения вычисляется по формулам:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}$$

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами плотности распределения одной случайной величины.

Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Большой вклад в развитие комбинаторных методов внесли Г.В. Лейбниц, Я. Бернулли и Л. Эйлер.

Французский философ, писатель, математик и физик Блез Паскаль (1623–1662) рано проявил свои выдающиеся математические способности. Круг математических интересов Паскаля был весьма разнообразен. Паскаль доказал одну из основных теорем проективной геометрии (теорема Паскаля), сконструировал суммирующую машину (арифмометр Паскаля), дал способ вычисления биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля), впервые точно определил и применил для

доказательства метод математической индукции, сделал существенный шаг в развитии анализа бесконечно малых, сыграл важную роль в зарождении теории вероятности. В гидростатике Паскаль установил ее основной закон (закон Паскаля). “Письма к провинциалу” Паскаля явились шедевром французской классической прозы.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед. В математике наряду с И. Ньютоном разработал дифференциальное и интегральное исчисление. Важный вклад внес в комбинаторику. С его именем, в частности, связаны теоретико-числовые задачи.

Готфрид Вильгельм Лейбниц имел мало внушительную внешность и поэтому производил впечатление довольно невзрачного человека. Однажды в Париже он зашел в книжную лавку в надежде приобрести книгу своего знакомого философа. На вопрос посетителя об этой книге книготорговец, осмотрев его с головы до ног, насмешливо бросил: “Зачем она вам? Неужели вы способны читать такие книги?” Не успел ученый ответить, как в лавку вошел сам автор книги со словами: “Великому Лейбницу привет и уважение!” Продавец никак не мог взять в толк, что перед ним действительно знаменитый Лейбниц, книги которого пользовались большим спросом среди ученых.

В дальнейшем важную роль будет играть следующая

Лемма. Пусть в множестве A m элементов, а в множестве B — n элементов. Тогда число всех различных пар (a, b) , где $a \in A, b \in B$ будет равно mn .

Доказательство. Действительно, с одним элементом из множества A мы можем составить n таких различных пар, а всего в множестве A m элементов.

Размещения, перестановки, сочетания

Пусть у нас есть множество из трех элементов $\{a, b, c\}$. Какими способами мы можем выбрать из этих элементов два? ab, ac, bc, ba, ca, cb .

Определение. Размещениями множества из n различных элементов по m элементов ($m \leq n$) называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по m элементов и отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число всех размещений множества из n элементов по m элементов обозначается через A_n^m (от начальной буквы французского слова “arrangement”, что означает размещение), где $n = 1, 2, \dots$ и $m = 1, n$.

Теорема. Число размещений множества из n элементов по m элементов равно

$$A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1).$$

Доказательство. Пусть у нас есть элементы a_1, a_2, \dots, a_n . Пусть $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ — возможные размещения. Будем строить эти размещения последовательно. Сначала определим a_{i_1} — первый элемент размещения. Из данной совокупности n элементов его можно выбрать n различными способами. После выбора первого элемента a_{i_1} для второго элемента a_{i_2} остается $n-1$ способов выбора и т.д. Так как каждый такой выбор дает новое размещение, то все эти выборы можно свободно комбинировать между собой. Поэтому имеем:

$$A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1).$$

Пример. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

Решение. Искомое число трехполосных флагов:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Определение. Перестановкой множества из n элементов называется расположение элементов в определенном порядке.

Так, все различные перестановки множества из трех элементов $\{a, b, c\}$ — это $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Очевидно, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n$.

Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n (от начальной буквы французского слова “permutation”, что значит “перестановка”, “перемещение”). Следовательно, число всех различных перестановок вычисляется по формуле

$$P_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Пример. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Искомое число расстановки 8 ладей

$$P_8 = 8! = 40320.$$

n	$n!$	n	$n!$
0	1	6	720
1	1	7	5040
2	2	8	40320
3	6	9	362880
4	24	10	3628800
5	120		

$0! = 1$ по определению!

Определение. Сочетаниями из n различных элементов по k элементов называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по k элементов и отличаются хотя бы одним элементом (иначе говоря, k -элементные подмножества данного множества из n элементов).

Как видим, в сочетаниях в отличие от размещений не учитывается порядок элементов. Число всех сочетаний из n элементов по k элементов в каждом обозначается C_n^k (от начальной буквы французского слова “combinaison”, что значит “сочетание”).

Числа C_n^k
 $C_5^2 = 10$

Все сочетания из множества $\{a, b, c, d, e\}$ по два —
 $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$.

$$C_n^0 = 1, C_n^n = 1, C_n^1 = n.$$

Свойства чисел C_n^k
 1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

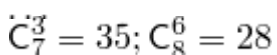
Действительно, каждому k -элементному подмножеству данного n -элементного множества соответствует одно и только одно $n - k$ -элементное подмножество того же множества.

$$2. C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Действительно, мы можем выбирать подмножества из k элементов следующим образом: фиксируем один элемент; число k -элементных подмножеств, содержащих этот элемент, равно C_{n-1}^{k-1} ; число k -элементных подмножеств, не содержащих этот элемент, равно C_{n-1}^k .

Треугольник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C_0^0 & & \\
 & & & C_1^0 & C_1^1 & & \\
 & & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & \\
 C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & \\
 \dots & & & & & &
 \end{array}$$



Теорема.

множества, в каждой из которых никакой элемент не встречается дважды?

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$
$$C_n^k = \frac{C_n^k \cdot k!}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}.$$

Домножим числитель и знаменатель этой дроби на $(n - k)!$:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

$$C_{20}^8 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 323 \cdot 390 = 125970.$$

$$C_{36}^5 = \frac{\overset{\text{Искомое}}{36!}}{\underset{\text{число}}{5!} \underset{\text{способов}}{31!}} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992.$$

1. Номера машин состоят из 3 букв русского алфавита (33 буквы) и 4 цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?

3. Сколько есть шестизначных чисел, делящихся на 5?

5. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

6. Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?

7. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр?

8. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисована окружность радиуса 100 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток может пересекать эта окружность?

9. Сколькими способами можно расставить в ряд числа $1, 2, \dots, n$ так, чтобы числа $1, 2, 3$ стояли рядом и притом шли в порядке возрастания?

10. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую цифру можно использовать только один раз?

11. Из слова РОТ перестановкой букв можно получить еще такие слова: ТОР, ОРТ, ОТР, ТРО, РТО. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова ЛОГАРИФМ?

12. Назовем разбиением натурального числа представление его в виде суммы натуральных чисел. Вот, например, все разбиения числа 4:

$4; 3 + 1; 1 + 3; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 2 + 1; 1 + 1 + 2; 1 + 1 + 1 + 1.$

Разбиения считаются разными, если они отличаются либо числами, либо порядком слагаемых.

Сколько существует различных разбиений числа 11 на 4 слагаемых?

13. Сколько существует трехзначных чисел с невозрастающим порядком цифр?

14. Сколько существует четырехзначных чисел с невозрастающим порядком цифр?

15. Сколькими способами можно рассадить в ряд 17 человек, чтобы *Аи Во* оказались рядом?

16. n девочек и m мальчиков рассаживаются произвольным образом в ряду из $2n$ мест. Сколькими способами можно их рассадить так, чтобы никакие две девочки не сидели рядом?

17. n девочек и m мальчиков рассаживаются произвольным образом в ряду из $2n$ мест. Сколькими способами можно их рассадить так, чтобы все девочки сидели рядом?